Università di Pisa
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2007/2008

Un'applicazione del Calcolo di Malliavin a Processi con Salti in Finanza

Candidato
Eleonora Castaldo

Relatore
Prof. Maurizio Pratelli

Controrelatore
Prof. Giorgio Letta

Indice

Introduzione

Il calcolo di Malliavin si è sviluppato principalmente alla fine degli anni '70 con l'obiettivo iniziale di dare una dimostrazione probabilistica del teorema di Hörmander, ma in seguito è diventato di centrale importanza anche in campo applicativo, segnatamente finanziario, grazie all'articolo di Fournié et al. ([9]), che ne ha proposto un'applicazione al calcolo delle cosiddette "greche". Nel gergo finanziario le "greche", calcolate come derivate del prezzo di un prodotto finanziario rispetto ad un qualche parametro, sono quantità importanti poiché rappresentano la sensibilità dei prezzi alle variazioni del parametro stesso.

Vediamo più in dettaglio l'idea che sta alla base dell'articolo [9]. Nei modelli più comunemente usati in finanza il prezzo del sottostante $(X_t)_{t\in[0,T]}$ è un processo markoviano a valori in $\mathbb{R}^n$ che verifica, sotto la probabilità martingala equivalente, un'equazione stocastica della forma:

$$\begin{cases} dX_t = r(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{1}$$

in cui W_t è un processo di Wiener e r e σ, detti rispettivamente tasso di interesse e volatilità, sono tali da garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione di (1), una volta fissata la condizione iniziale $X_0 = x$. Inoltre è sempre possibile scegliere una versione di (X_t) che abbia traiettorie continue.

Nell'ipotesi di assenza di arbitraggio il prezzo u di un prodotto derivato, con funzione **payoff** φ, dipende esclusivamente da $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$; più precisamente si calcola come la speranza

$$u(x) = E\left[\varphi(X)\middle|X_0 = x\right].$$

Spesso non è disponibile una soluzione esplicita e dunque il valore di u viene approssimato numericamente con il metodo Monte-Carlo, mentre le sue derivate rispetto a x, r e σ possono essere approssimate in vari modi: il più semplice è il metodo delle differenze finite che ha una velocità di convergenza di $n^{-\frac{1}{3}}$ nel caso in cui φ sia sufficientemente regolare. Purtroppo tale metodo è molto più lento quando il payoff è discontinuo o si vogliono calcolare derivate di ordine superiore al primo. Il calcolo di Malliavin, invece, permette di esprimere le greche sotto la forma:

$$E\left[\varphi(X)\pi\middle|X_0 = x\right],$$

dove il peso π è una variabile aleatoria che non dipende dal payoff. Utilizzando questa rappresentazione è possibile calcolare numericamente ogni greca con un metodo Monte-Carlo: ciò permette di raggiungere una convergenza dell'ordine di $n^{-\frac{1}{2}}$.

Nella tesi abbiamo esteso questi argomenti ad un modello più generale, considerando il caso in cui il prezzo del sottostante abbia delle discontinuità. In particolare abbiamo studiato il processo $(X_t)_{t\in[0,T]}$ che verifica:

$$\begin{cases} dX_t = X_{t-}[r(t)dt + \sigma(t)dW_t + d(\sum_{j\le P_t} U_j - t\lambda E[U_j])] \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{2}$$

dove (W_t) è, come prima, un processo di Wiener, (P_t) è un processo di Poisson di parametro λ, $(U_j)_{j\ge1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti equidistribuite a valori in $]-1,+\infty[$ e le tribù generate da $(W_t)_{t\ge0}$, $(P_t)_{t\ge0}$ e $(U_j)_{j\ge1}$ sono indipendenti.

In questo caso l'aleatorietà è espressa non solo dal processo di Wiener (W_t), ma anche da quello di Poisson (P_t), che determina gli istanti di discontinuità nel prezzo del sottostante, e dalla successione $(U_j)_{j\ge1}$ che definisce l'ampiezza di queste discontinuità. Diventa dunque naturale estendere il calcolo di Malliavin anche ai processi di Poisson. Per derivare e integrare rispetto all'ampiezza dei salti si può solo definire un calcolo di Malliavin in dimensione finita, che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, fornisce il peso π sull'insieme $\{P_t = n\}$, sufficiente per il calcolo numerico delle greche.

Nel dettaglio il contenuto della tesi è il seguente.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto i principali strumenti utilizzati nel seguito, in particolare i concetti di misura aleatoria e del suo compensatore prevedibile. Il risultato centrale di questa sezione è la caratterizzazione del compensatore di una misura aleatoria di Poisson.

Nel secondo capitolo abbiamo dimostrato i risultati di esistenza e unicità delle soluzioni delle equazioni differenzali stocastiche.

Nel terzo capitolo abbiamo presentato il teorema di Girsanov-Meyer, il risultato centrale per determinare il peso π nel calcolo di $\rho = \frac{\partial u}{\partial r}$. In particolare ne abbiamo analizzato separatamente l'applicazione ad un processo di Wiener e ad una misura aleatoria.

Nel quarto capitolo abbiamo dapprima esposto la teoria del calcolo di Malliavin classica, che sfrutta la decomposizione in caos di Wiener, e in seguito abbiamo indicato come si possano ottenere gli stessi risultati con l'uso del teorema di Girsanov-Meyer. Il calcolo di Malliavin per processi di Poisson, invece, richiede una trattazione più delicata: la definizione attraverso la decomposizione in caos di Poisson non porta a strumenti utili nei calcoli, si deve quindi necessariamente passare attraverso il teorema di Girsanov-Meyer per ottenere una definizione di derivata maneggevole. Abbiamo introdotto poi il calcolo di Malliavin in dimensione finita.

Nel quinto capitolo, infine, abbiamo presentato il calcolo esplicito dei vari pesi π e delle considerazioni su come possa essere scelto un peso minimale. Abbiamo concluso con delle simulazioni che confrontano la velocità di convergenza del metodo Monte-Carlo applicato al calcolo delle greche con pesi diversi.

Capitolo 1

Alcuni argomenti di analisi stocastica

1.1 Definizioni

1.1.1 Misure aleatorie

Supporremo che sia dato uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ crescente e tale che, per ogni t, $\mathcal{F}_t$ sia completa e $\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$: diremo che la filtrazione $\{F_t\}$ soddisfa le **condizioni abituali**. Diremo inoltre che un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ è **càdlàg**, abbreviazione dal francese per "continuo a destra con limite sinistro", tale che per quasi ogni $\omega \in \Omega$:

- $\lim_{s \to t^+} X_s(\omega) = X_t(\omega)$ per ogni t;
- $\lim_{s \to t^-} X_s(\omega)$ esiste per ogni t.

Un processo stocastico $X = (X_t)_{t \geq 0}$ può essere visto come un'applicazione da $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ a valori in un altro spazio misurabile $(G, \mathcal{G})$; diventa quindi naturale dotare $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ delle tribù che rendono misurabili alcune classi di processi particolarmente utili. Chiameremo **tribù opzionale** $\mathcal{O}$ quella generata dai processi càdlàg adattati alla filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$ e **tribù prevedibile** $\mathcal{P}$ quella generata dai processi adattati con traiettorie continue a sinistra, che coincide anche con quella generata dai processi adattati con traiettorie continue. Quindi $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}$. Inoltre si verifica facilmente che $\mathcal{P}$ è generata dalla famiglia di insiemi $\{A_0 \times \{0\}$: A_0 è $\mathcal{F}_0$-misurabile$\} \cup \{A_s \times]s, t]$: A_s è $\mathcal{F}_s$-misurabile$\}$). Un **processo** si dice **adattato** (rispettivamente **prevedibile**) se è misurabile rispetto a $\mathcal{O}$ (risp. rispetto a $\mathcal{P}$).

Definizione 1.1. *Indichiamo con $\mathcal{A}^+$ (risp. $\mathcal{A}$) l'insieme dei processi A a valori reali che siano càdlàg, integrabili, adattati con $A_0 = 0$ e tali che ogni traiettoria $t \to A_t(\omega)$ sia non decrescente (risp. abbia variazione finita* *su ogni intervallo finito $[0,t]$). Indichiamo con $\mathcal{A}^+_{loc}$ la classe localizzata costruita a partire da $\mathcal{A}^+$, cioè $A \in \mathcal{A}^+_{loc}$ se e solo se esiste una sequenza crescente di tempi d'arresto T_n tale che $\lim_n T_n = \infty$ quasi certamente e ogni processo arrestato $A^{T_N} \in \mathcal{A}^+$. Analogamente $\mathcal{A}_{loc}$ è la classe localizzata costruita a partire da $\mathcal{A}$.*

Se $A \in \mathcal{A}$, esiste un'unica coppia di processi (B, C), tali che $B, C \in \mathcal{A}^+$ e $A = B - C$.

Se $A \in \mathcal{A}^+$, per ogni $\omega \in \Omega$ la traiettoria $t \to A_t(\omega)$ è la funzione di distribuzione di una misura positiva su $\mathbb{R}_+$, che è finita dato che $E[A_\infty] < \infty$. Indicheremo questa misura con $dA_t(\omega)$.

Teorema 1.2. *Sia $A \in \mathcal{A}^+_{loc}$. Esiste un processo prevedibile in A^+_{loc}, chiamato il* ***compensatore (prevedibile)*** *di A e indicato con A^p tale che $A - A^p$ sia una martingala locale. A^p è unico a meno di un insieme evanescente, cioè un insieme $B \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ tale che $\mathbb{P}\{\omega : \exists t \in \mathbb{R}_+, (\omega, t) \in B\} = 0$.*

Dimostrazione. Si veda [11]. □

Un'estensione dei concetti di processo crescente e del suo compensatore prevedibile è data dalle nozioni di misura aleatoria e del rispettivo compensatore, degli strumenti fondamentali per la descrizione dei salti di un processo càdlàg.

Definizione 1.3. *Una* ***misura aleatoria*** *su $\mathbb{R}_+ \times E$ è una famiglia $\mu = (\mu(\omega, dt, dx); \omega \in \Omega)$ di misure non negative su $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E})$ tale che $\mu(\omega; \{0\} \times E) = 0$.*

Si può associare ad $A \in \mathcal{A}^+$ una misura aleatoria μ su $\mathbb{R}_+ \times \{1\}$ ponendo $\mu(\omega, dt \times \{1\}) = dA_t(\omega)$. Se invece μ è una generica misura aleatoria su $\mathbb{R}_+ \times \{1\}$ non è sempre possibile trovare un processo $A \in \mathcal{A}^+$ per cui valga la relazione precedente, perché $\mu(\omega, dt \times \{1\})$ può essere infinto per ogni $t > 0$.

Chiamiamo $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, che a sua volta può essere dotato delle tribù prodotto: $\tilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$ e $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$. Una funzione W su $\tilde{\Omega}$ che sia $\tilde{\mathcal{O}}$-misurabile (risp. $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabile) è detta opzionale (risp. prevedibile). Se μ è una misura aleatoria e W è una funzione opzionale su $\tilde{\Omega}$ possiamo definire il processo integrale $W * \mu_t$ come il processo:

$$(W * \mu)_t(\omega) = \begin{cases} \iint_{[0,t]\times E} W(\omega, s, x)\mu(\omega, ds, dx) & \text{se } \iint_{[0,t]\times E} |W| d\mu < \infty \\ +\infty & \text{se } \iint_{[0,t]\times E} |W| d\mu = \infty. \end{cases}$$

Definizione 1.4. *Una misura aleatoria è detta* ***opzionale*** *(risp.* ***prevedibile****) se il processo $W * \mu$ è opzionale (risp. prevedibile) per ogni funzione opzionale (risp. prevedibile) W.*

Definizione 1.5. *Una misura aleatoria opzionale μ è detta $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finita se esiste una funzione prevedibile e strettamente positiva V su $\tilde{\Omega}$ tale che la variabile aleatoria $V * \mu_\infty$ sia integrabile.*

Analogamente a quanto fatto per i processi con traiettorie non decrescenti, anche per le misure aleatorie si può enunciare un teorema di esistenza del compensatore prevedibile.

Teorema 1.6. *Sia μ una misura aleatoria opzionale e $\tilde{\mathcal{P}}$-σ-finita. Esiste una misura aleatoria prevedibile ν, unica a meno di un insieme di $\mathbb{P}$-misura nulla, tale che, per ogni funzione K, $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabile su $\tilde{\Omega}$ e tale che $|K| * \mu \in \mathcal{A}^+_{loc}$,*

$$K * \mu - K * \nu$$

sia una martingala locale.

Dimostrazione. Si veda [11]. □

Concentreremo la nostra attenzione su una classe particolare di misure aleatorie: le misure aleatorie di Poisson.

Definizione 1.7. *Una **misura aleatoria di Poisson** su $\mathbb{R}_+ \times E$ è una misura aleatoria a valori interi (cioè tale che per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ si abbia $\mu(\omega; \{t\} \times E) \leq 1$ e per ogni $A \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$ si abbia $\mu(\cdot, A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) per cui valgono le seguenti proprietà:*

(a) per ogni $A \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$, $\mu(\cdot, A)$ ha distribuzione di Poisson, cioè

$$\mathbb{P}(\mu(\cdot, A) = n) = \lambda(A)^n \frac{e^{-\lambda(A)}}{n!}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $\lambda(A) = E[\mu(\cdot, A)]$;

(b) se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{E}$ sono disgiunti, $\mu(\cdot, A_1), \ldots, \mu(\cdot, A_n)$ sono mutualmente indipendenti.

*Se μ ha la forma $\mu(dt, dx) = dt \times F(dx)$, con F una misura σ-finita positiva su $(E, \mathcal{E})$, allora μ è detta una **misura di Poisson omogenea**.*

1.1.2 Processo di Poisson composto e misura aleatoria associata

Sia $(\tau_n)_{n\geq 0}$ una successione strettamente crescente di variabili aleatorie positive, con $\tau_0 = 0$ q.o. Il processo $\sum_{n\geq 1} \chi_{\{t\geq \tau_n\}}$ è detto **processo che conta i punti** associato alla sequenza $(\tau_n)_{n\geq 0}$.

Definizione 1.8. *Un processo $(P_t)_{t\geq 0}$ adattato che conta i punti è detto **Processo di Poisson** se*

(a) *ha incrementi indipendenti, cioè per ogni $0 \leq s \leq t$, $P_t - P_s$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$;*

(b) *è stazionario, cioè per ogni $s, t \geq 0$, $P_{s+t} - P_s$ e $P_t - P_0$ hanno la stessa legge.*

Se P è un processo di Poisson allora esiste $\lambda > 0$, detto **intensità** del processo, tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(P_t = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$. Si verifica inoltre facilmente che $E[P_t] = \lambda t$ e che $P_t - \lambda t$ è una martingala; il processo $(P_t - \lambda t)$ è detto **Processo di Poisson compensato**. Le funzioni caratteristiche del processo di Poison (P_t) e del processo di Poisson compensato $(P_t - \lambda t)$ sono date da

$$E\left[e^{iuP_t}\right] = e^{\lambda t(e^{(iu)}-1)},$$

e

$$E\left[e^{iu(P_t - \lambda t)}\right] = e^{\lambda t(e^{(iu)}-1-iu)}.$$

Definizione 1.9. *Chiamiamo* ***processo di Poisson composto*** *il processo $(N_t)_{t\geq 0}$ dato da:*

$$N_t = \sum_{n \leq P_t} U_n. \tag{1.1}$$

dove $(P_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Poisson e $(U_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite, indipendenti anche dalla successione di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\geq 0}$ del processo di Poisson.

Ad ogni processo di Poisson composto N_t possiamo associare una misura aleatoria con il seguente procedimento. Sia $\Lambda \subset \mathbb{R}$ limitato tale che $0 \notin \bar{\Lambda}$; definiamo ricorsivamente le variabili aleatorie τ_n^Λ:

$$\begin{aligned} \tau_1^\Lambda &= \inf\{t > 0 : \Delta N_t \in \Lambda\} \\ &\vdots \\ \tau_{n+1}^\Lambda &= \inf\{t > \tau_n^\Lambda : \Delta N_t \in \Lambda\}. \end{aligned}$$

Poiché N ha traiettorie càdlàg e $0 \notin \bar{\Lambda}$, si ha che $\{\tau_n^\Lambda \geq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$ e quindi τ_n^Λ è un tempo d'arresto, $\lim_{n\to\infty} \tau_n^\Lambda = \infty$ e inoltre, dalla condizione $0 \notin \bar{\Lambda}$ e sapendo che le traiettorie sono càdlàg, possiamo concludere che $\tau_1^\Lambda > 0$. Definiamo

$$\mu_t^\Lambda = \sum_{0 \leq s \leq t} \chi_\Lambda(\Delta N_s);$$

μ^Λ è un processo che conta i punti e tale che per $0 \leq s < t$

(a) $\mu_t^\Lambda - \mu_s^\Lambda$ è indipendente da $\mathcal{F}_s$, infatti $\mu_t^\Lambda - \mu_s^\Lambda$ appartiene alla σ-algebra generata da $\{N_u - N_v : s \leq v < u \leq t\}$;

(b) $\mu_t^\Lambda - \mu_s^\Lambda$ ha la stessa distribuzione di μ_{t-s}^Λ, infatti $\mu_t^\Lambda - \mu_s^\Lambda$ è il numero di salti che $N_{s+u} - N_s$ ha in Λ (con $0 \leq u \leq t-s$) e il risultato segue dalla stazionarietà di N.

Quindi μ^Λ è un processo di Poisson.

Teorema 1.10. *La funzione $\Lambda \to \mu_t^\Lambda(\omega)$ definisce una misura σ-finita su $\mathbb{R} - \{0\}$ per ogni (ω, t) fissati, e anche la funzione $\lambda(\Lambda) = E[N_1^\Lambda]$, cioè l'intensità del processo di Poisson μ^Λ, definisce una misura σ-finita su $\mathbb{R} - \{0\}$.*

In particolare μ^Λ e λ^Λ ci permettono di definire due misure aleatorie $\mu(\cdot, dt, dx)$ e $\nu(\cdot, dt, dx)$ su $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} - \{0\}$, date da:

$$\mu(\cdot, [0,t], \Lambda) = \mu_t^\Lambda, \quad e \quad \nu(\cdot, [0,t], \Lambda) = t\lambda(\Lambda). \tag{1.2}$$

Teorema 1.11. *Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{R}_+ \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R} - 0)$ sono insiemi disgiunti, $\mu(\cdot, A_1)$,...,$\mu(\cdot, A_n)$ sono mutualmente indipendenti.*

Dunque $\mu(\cdot, dt, dx)$ è una misura aleatoria di Poisson su $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} - \{0\}$. Verifichiamo che $\nu(\cdot, dt, dx)$ è il compensatore di $\mu(\cdot, dt, dx)$: infatti per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ e per ogni $\Lambda \in \mathcal{R} - \{0\}$

$$\mu(\cdot, [0,t], \Lambda) - \nu(\cdot, [0,t], \Lambda) = \mu_t^\Lambda - t\nu(\Lambda)$$

è un processo di Poisson meno la sua media, quindi è una martingala; ne segue che per, ogni funzione K della forma

$$K(\omega, t, x) = \chi_{A_u} \chi_{]u,v]} \chi_\Lambda,$$

dove $0 \leq u \leq v$, A_u è $\mathcal{F}_u$-misurabile e $\Lambda \in \mathcal{R} - \{0\}$, si ha che

$$\int \int_{[0,t] \times \mathbb{R} - \{0\}} K(\mu(\cdot, ds, dx) - \nu(\cdot, ds, dx))$$

è una martinagala, e lo stesso risultato si estende poi a ogni funzione $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabile. Questo prova che ν è il compensatore della misura aleatoria μ associata al processo di Poisson composto.

Viceversa vogliamo verificare che una misura aleatoria $\mu(\cdot, dt, dx)$ che abbia come compensatore la misura non aleatoria $\nu(\cdot, dt, dx) = dt\lambda(dx)$, con λ misura finita su $\mathbb{R}$, è la misura associata ad un processo di Poisson composto. per farlo abbiamo bisogno di introdurre gli integrali stocastici e la fondamentale formula di Itô.

1.2 Integrale stocastico

Definizione 1.12. *Se (M_t) e (N_t) sono martingale localmente di quadrato integrabile, chiamiamo* ***covariazione quadratica prevedibile*** *di M e N il processo prevedibile con traiettorie a variazione finita $\langle M, N\rangle$, unico a meno di un insieme evanescente, tale che $MN - \langle M, N\rangle$ sia una martingala locale e $\langle M, N\rangle_0 = 0$. Indichiamo con $\langle X\rangle_t = \langle X, X\rangle_t$ il processo di* ***variazione quadratica prevedibile****.*

Supponiamo che M_t sia una martingala di quadrato integrabile con traiettorie càdlàg. È naturale definire l'integrale stocastico sui processi semplici del tipo

$$H_s(\omega) = \sum_{i=1}^{m} G_i(\omega)\chi_{]a_i,b_i]}(s), \tag{1.3}$$

dove, per ogni i, $0 \leq a_i < b_i < \infty$ e G_i è $\mathcal{F}_i$-misurabile e limitata, come:

$$H \cdot M_t = \int_0^t H_s dM_s = \sum_{i=1}^{m} G_i(M_{t\wedge b_i} - M_{t\wedge a_i}).$$

$H \cdot M$ così definito è una martingala

Sia ora H un processo $\mathcal{P}$-misurabile tale che $E\left[\int_0^\infty H_s^2 \langle M\rangle_s\right] < \infty$. Possiamo approssimare H con dei processi semplici $H^n = (H_s^n)$ che verificano la (1.3). Se chiamiamo $(H \cdot M_t)^n = \int_0^t H_s^n dM_s$, si può verificare che $(H \cdot M_t)^n$ converge in L^2. Chiamiamo il limite $H \cdot M_t = \int_0^t H_s dM_s$. L'integrale stocastico non dipende dalla sequenza H^n scelta, ed inoltre è una martingala di quadrato integrabile càdlàg.

Se $(M_t) = (W_t)$ è un processo di Wiener (di cui richiamiamo brevemente la costruzione nel paragrafo 4.1), $H \cdot W_t = \int_0^t H_s dW_s$ è una martingala a traiettorie continue se

$$E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < \infty.$$

Inoltre, anche quando queste quantità sono infinite, vale l'isometria di Itô:

$$E\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T H_s^2 ds\right].$$

Possiamo generalizzare la definizione di integrale stocastico a processi più generali: in particolare vorremmo integrare processi prevedibili e localmente limitati rispetto a una semimartingala.

Definizione 1.13. *Un processo prevedibile (H_s) è* ***localmente limitato*** *se esistono una succssione crescente di tempi d'arresto $(R_n)_{n\geq 0}$, $R_n \to \infty$ e delle costandi K_n tale che il processo (H_s) sia limitato da K_n su $[0, R_n]$.*

Definizione 1.14. *Un processo* (X_t) *è detto una* ***semimartingala*** *se si può scrivere nella forma:*

$$X_t = X_0 + M_t + A_t$$

dove M_t *è una* $\mathcal{F}_t$*-martingala locale tale che* $M_0 = 0$ *q.c. a* A_t *è un processo* $\mathcal{F}_t$*-adattato, continuo a destra tale che* $A_0 = 0$ *q.c. e le traiettorie* $t \to A_t$ *sono quasi certamente di variazione limitata su ogni intervallo finito.*

Nel seguito tratteremo soltanto una classe particolare di semimartingale, le semimartingale localmente di quadrato integrabile. (X_t) è una **semimartingala localmente di quadrato integrabile** se esiste una successione crescente di tempi d'arresto $(T_n)_{n\geq 0}$, $T_n \to \infty$ tale che $X_t^{T_n} = U_t^n + V_t^n$, con U^n martingala di quadrato integrabile e V^n un processo con traiettorie a variazione limitata che abbia variazione totale finita sull'itervallo $[0, \infty]$. Inoltre $U_t^n = U_t^{T_n}$ e $V_t^n = V_t^{T_n}$ per $t \geq T_n$.

Possiamo ora definire $\int_0^t H_s dX_s$ in cui (H_s) è un processo prevedibile e localmente limitato e (X_s) è una semimartingala ponendo

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_{s\wedge R_n} dU_{s\wedge T_n} + \int_0^t H_{s\wedge R_n} dV_{s\wedge T_n},$$

quando $t \leq T_n \wedge R_n$. Si verifica che questa definizione non dipende dalla scelta di R_n e T_n.

Definizione 1.15. *Se* (X_t) *e* (Y_t) *sono due semimartingale il processo di* ***covariazione quadratica*** *di* X *e* Y *è il processo càdlàg adattato con traiettorie a variazione finita intervalli finiti definito da:*

$$[X, Y]_t = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t X_- dY - \int_0^t Y_- dX.$$

Indichiamo con $[X]_t = [X, X]_t$ *il processo di* ***variazione quadratica****.*

Da questa definizione ricaviamo la **formula di integrazione per parti**, che ci sarà utile inseguito: se X e Y sono due semimartingale, allora XY è una semimartingala e si ha:

$$XY = \int X_- dY + \int Y_- dX + [X, Y]. \tag{1.4}$$

Possiamo decomporre $[X]$ in una parte continua e una parte di puri salti:

$$[X]_t = [X]_t^c + \sum_{o\leq s\leq t} (\Delta X_s)^2.$$

Esempio 1.16. *la parte continua della variazione quadratica di un processo di Poisson* $(P_t)_{t\geq 0}$ *è nulla. Si ottiene dunque:*

$$[P]_t = \sum_{o\leq s\leq t} (\Delta P_s)^2 = P_t.$$

Lo stesso procedimento può essere applicato anche per definire l'integrale stocastico rispetto alla misura aleatoria compensata $\mu - \nu$. Siano μ e ν quelli dati dalle formule (1.2). Supponiamo che $H(\omega, t, x)$ sia una funzione semplice della forma:

$$H(\omega, t, x) = \sum_{i=1}^{n} K_i(\omega)\chi_{]a_i,b_i]}(s)\chi_{A_i}(x) \tag{1.5}$$

dove, per ogni i, K_i è $\mathcal{F}_{a_i}$ misurabile e $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$, con $\lambda(A_i) < \infty$. Analogamente a quanto fatto prima definiamo:

$$\begin{aligned} I(H)_t &= \int\int_{[0,t]\times\mathcal{R}-\{0\}} H(\cdot, s, z)(\mu - \nu)(\cdot, ds, dz) \\ &= \sum_{i=1}^{n} K_i(\mu - \nu)((]a_i, b_i] \cap [0, t]) \times A_i). \end{aligned}$$

Per linearità $I(H)$è una martingala e inoltre

$$[I(H)]_t = \int\int_{[0,t]\times\mathcal{R}-\{0\}} H(\cdot, s, z)^2\mu(\cdot, ds, dz) \tag{1.6}$$

e

$$\langle I(H)\rangle_t = \int\int_{[0,t]\times\mathcal{R}-\{0\}} H(\cdot, s, z)^2\nu(\cdot, ds, dz). \tag{1.7}$$

Se μ assegna massa unitaria a (ω, t, x), allora il processo $I(H)$ al tempo t ha un salto di ampiezza $H(\omega, t, x)$.

La definizione di integrale rispetto a $\mu - \nu$ si estende a tutte le funzioni $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabili, sfruttando la densità delle funzioni semplici del tipo (1.5). Si verifica che restano ancora valide le relazioni (1.6) e (1.7).

I seguenti teoremi forniscono degli strumenti di calcolo importanti nella teoria degli integrali stocastici:

Teorema 1.17. *Se (X_t) e (Y_t) sono due semimartingale e (H_t) e (K_t) sono prevedibili e localmente limitati, allora:*

$$[H \cdot X, K \cdot Y]_t = \int_0^t H_s K_s d[X, Y]_s. \tag{1.8}$$

L'equazione (1.8) resta vera anche se H e K sono processi prevedibili tali che $\int |H_s K_s| dV_s < \infty$, dove V_s rappresenta la variazione del processo $([M, N]_s)_s$.

Teorema 1.18. (Formula di Itô) *Sia f una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ su $\mathbb{R}$ e sia $(X_t)_{t\geq 0}$ una semimartingala. Allora il processo stocastico $f(X_t)$ è anch'esso una semimartingla e si ha:*

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \int_0^t f^{'}(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(X_{s-})d\langle X^c\rangle_s \\ &+ \sum_{s\leq t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s\right]. \end{aligned}$$

Se $X = (X^1, \dots, X^n)$ è una n-upla di semimartingale e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{C}^2$, f(X) è anch'essa una semimartingala e si ha:

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) = \quad & \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s-}) dX_s^i \\ + \quad & \frac{1}{2} \sum_{1 \le i,j \le n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_{s-}) d\langle X^i, X^j \rangle_s^c \\ + \quad & \sum_{s \le t} \left[f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_{s^-}) \Delta X_s^i \right]. \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si estende in maniera ovvia nel caso di un processo d-dimensionale.

1.3 Caratterizzazione del compensatore di una misura aleatoria di Poisson

Dato un processo $(X_t)_{t \ge 0}$ $\mathcal{F}_t$-adattato con traiettorie càdlàg, consideriamo il processo $(J_t)_{t \ge 0}$ definito da:

$$J_t = \sum_{0 < s \le t} \Delta X_s$$

e la misura aleatoria ad esso associata μ^J.

Teorema 1.19. *Se il compensatore di μ^J è una misura non aleatoria σ-finita ν^J della forma*

$$\nu^J = dtG(dx),$$

dove G è una misura finita ($G = \lambda F$ con F densità di probabilità), allora J è un processo di Poisson composto di intensità λ della forma (1.1)*, in cui la legge dei salti è quella individuata da $F(dx)$.*

Dimostrazione. Siano $0 \le s < t$ e siano $U_1, U_2, \dots U_n \in \mathcal{R} - \{0\}$ sottoinsiemi disgiunti tali che $\nu^J(]0, t] \times U_k) < \infty$ per ogni $k = 1, \dots, n$. È sufficiente verificare che

$$\begin{aligned} E \quad & \left[\exp\left(-\sum_{k=1}^{m} u_k \mu^J(]s, t] \times U_k) \right) |\mathcal{F}_s \right] \\ & = e^{-\sum_{k=1}^{m} (e^{u_k} - 1) \nu^J(]s,t] \times U_k)}. \end{aligned}$$

Sia $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_m) = e^{-\sum_{k=1}^{m} u_k x_k}$ e $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$ in cui poniamo $f^k(\omega, x, t) = \chi_{U_k}(x)$. Allora:

$$\int_0^{t+} \int_{\mathbb{R} - \{0\}} f^k(\cdot, s, x) \mu^J(ds, dx) = \mu^J(]0, t] \times U_k);$$

inoltre, se chiamiamo $\mu(t) = (\mu^J(]0,t] \times U_1), \ldots, \mu^J(]0,t] \times U_m))$, dalla formula di Itô si ha:

$$\begin{aligned}\varphi(\mu(t)) - \varphi(\mu(s)) &= \int_{s+}^{t+}\int_{\mathbb{R}-\{0\}} [\varphi(\mu(u-) + f(\cdot,s,x)) - \varphi(\mu(u-))]\mu^J(du,dx) \\ = \text{una martingala} &+ \int_{s}^{t}\int_{\mathbb{R}-\{0\}} [\varphi(\mu(u) + f(\cdot,s,x)) - \varphi(\mu(u))]\nu^J(du,dx).\end{aligned}$$

Dalle definizioni di φ e f si ha che:

$$\varphi(\mu(u) + f(\cdot,s,x)) - \varphi(\mu(u)) = e^{-\sum_{k=1}^m u_k \mu(]0,u]\times U_k)}(e^{-\sum_{k=1}^m u_k \chi_{U_k}(x)} - 1).$$

Se prendiamo $A \in \mathcal{F}_s$, possiamo moltiplicare entrambi i termini dell'equazione precedente per $\exp\left[\sum_{k=1}^m u_k \mu(]0,u] \times U_k)\right] \chi_A$ e prenderne la speranza, ottenendo:

$$\begin{aligned}&E\left[e^{-\sum_{k=1}^m u_k \mu(]s,u]\times U_k)}\chi_A\right] - \mathbb{P}(A) \\ &= \int_s^t \int_{\mathbb{R}-\{0\}} E\left[e^{-\sum_{k=1}^m u_k \mu(]s,u]\times U_k)}\chi_A\right](e^{-\sum_{k=1}^m u_k \chi_{U_k}(x)} - 1)\nu^J(du,dx).\end{aligned}$$

Da quest'equazione integrale si ottiene che per ogni $A \in \mathcal{F}_s$:

$$E\left[e^{-\sum_{k=1}^m u_k \mu(]s,u]\times U_k)}\chi_A\right] = \mathbb{P}(A) \exp\left[\sum_{k=1}^m \left(e^{-u_k} - 1\right) \nu^J(]s,t] \times U_k)\right].$$

Da questo segue, in particolare che, se $\nu^J(dt,dx) = dtF(dx)$,

$$E\left[e^{-\sum_{k=1}^m u_k \mu(]s,u]\times U_k)}\Big|\mathcal{F}_s\right] = \exp\left[(t-s)\sum_{k=1}^m (e^{-u_k} - 1)F(U_k)\right],$$

e dunque J è un processo di Poisson composto la cui legge dei salti è data da $F(dx)$. $\square$

Capitolo 2

Equazioni differenziali stocastiche

2.1 Formula esponenziale di Doléans-Dade

Teorema 2.1. Formula di Doléans-Dade *Sia N una semimartingala. Allora esiste una e una sola semimartingala Z tale che*

$$\begin{cases} dZ_t = Z_{t-}dN_t \\ Z_0 = z_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

che è data dalla formula:

$$Z_t = z_0 e^{N_t - \frac{1}{2}<N^c, N^c>} \prod_{0 \leq s \leq t} (1 + \Delta N_s) e^{-\Delta N_s}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo innaniztutto che il processo definito dall'equazione 2.1 esiste. Dobbiamo cioè verificare che il processo:

$$\begin{cases} V_t = \prod_{0<s\leq t}(1 + \Delta N_s)e^{-\Delta N_s} \\ V_0 = v_0 \end{cases}$$

esiste ed è a variazione finita, puramente discontinuo. Dalla formula d'integrazione per parti segue che il prodotto di un numero finito di funzioni a variazione finita e puramente discontinue mantiene queste proprietà. Possiamo scartare i salti $\Delta N_s \geq \frac{1}{2}$, che sono in numero finito su ogni intervallo finito, e quindi dobbiamo provare il risultato per

$$\begin{cases} V'_t = \prod_{0<s\leq t}(1 + \Delta N_s \chi_{|\Delta N_s| \geq \frac{1}{2}})e^{-\Delta N_s \chi_{|\Delta N_s| \geq \frac{1}{2}}} \\ V'_0 = v_0. \end{cases}$$

Si ha che

$$\log V'_t = \sum_{0<s\leq t} (1 + \Delta N_s \chi_{|\Delta N_s| \geq \frac{1}{2}})e^{-\Delta N_s \chi_{|\Delta N_s| \geq \frac{1}{2}}}$$

è un processo assolutamente convergente, perché $\sum_{0<s\leq t} \Delta N_S^2$ converge e $\log V_t'$ è un processo a variazione finita puramente discontinuo, pertanto anche $V_t' = e^{\log V_t'}$ lo è.

Poniamo $K_t = N_t - \frac{1}{2}\langle N^c, N^c\rangle_t$ e chiamiamo $F(x,y) = e^x y$. Allora $Z_t = F(K_t, V_t)$ e quidi Z è una martingala, inoltre, grazie alla formula di Itô possiamo scrivere:

$$
\begin{aligned}
Z_t - Z_0 &= \int_0^t Z_{s-} dK_s + \int_0^t e^{K_{s-}} dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-} d\langle K^c, K^c\rangle_s \\
&\quad + \sum_{0\leq s\leq t} \left(Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta K_s - e^{-K_{s-}}\Delta V_s \right).
\end{aligned}
$$

Applichiamo la formula di cambiamento di variabile (si veda [15]): in

- in $I_1 := \int_0^t Z_{s-} dK_s$ sostituiamo $dN_s \frac{1}{2} d\langle V^c, V^c\rangle_s$ a dK_s;

- in $I_3 := \int_0^t e^{K_{s-}} dV_s$ sostituiamo N^c a K^c.

Pertanto $I_1 + I_3 = \int_0^t Z_{s-} dN_s$. Inoltre

$$
I_2 := \frac{1}{2}\int_0^t Z_{s-} d\langle K^c, K^c\rangle_s = \sum_{0\leq s\leq t} e^{K_{s-}}\Delta V_s,
$$

poiché V è a veriazione finita e puramente discontinuo. Infine osserviamo che in $I_4 := \sum_{0\leq s\leq t} \left(Z_s - Z_{s-} - Z_{s-}\Delta K_s - e^{-K_{s-}}\Delta V_s \right)$ si ha:

$$
Z_s = Z_{s-}(1 + \Delta V_s)
$$

e $Z_{s-}\Delta K_s = Z_{s-}\Delta N_s$. Quindi $I_2 + I_4 = 0$.

Ne segue che Z verifica la (2.1).

Anche l'unicità si ottiene come applcazione del teorema di cambiamento di variabile (si veda [15]). □

2.2 Esistenza e unicità della soluzione

Vogliamo verificare, sotto opportune ipotesi di regolarità, l'esistenza e l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$
\begin{cases} dX_t = r(t, X_{t-})dt + \sigma(t, X_{t-})dW_t + d(\sum_{j\leq P_t} U_j), \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{2.2}
$$

dove, come sempre, (P_t) è un processo di Poisson di parametro λ, e la $(U_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti ed equidistribuite. Inoltre le tribù generate da (W_t), (P_t) e $(U_n)_{n\geq 0}$ sono tra loro indipendenti e x_0 è $\mathcal{F}_0$-misurabile con $E[|x_0|^2] < \infty$.

Citiamo, senza dimostrarli, due risultati classici che sfrutteremo nella dimostrazione dell'esistenza della soluzione di (2.2).

Proposizione 2.2. (Diseguaglianza di Doob) *Sia* $(M_t)_{0\leq t\leq T}$ *una martingala di quadrato integrabile,*

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T}|M_t|^2\right]\leq 4E[|M_T|^2]. \tag{2.3}$$

Lemma 2.3. (Gromwall) *Sia* $f\in\mathcal{C}([0,T])$ *tale che per ogni* $0\leq t\leq T$ *si abbia:*

$$f(t)\leq a+b\int_0^t f(s)ds.$$

Allora $f(T)\leq a(1+e^{bT})$.

Iniziamo verificando l'esistenze e l'unicità della soluzione di

$$\begin{cases} dZ_t=r(t,Z_{t-})dt+\sigma(t,Z_{t-})dW_t,\\ Z_0=x_0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Presentiamo i prossimi risultati solo nel caso scalare, essendo quello vettoriale una semplice estensione.

Teorema 2.4. *Supponiamo che* r *e* σ *siano funzioni continue tali che*

(a) esista $K_1>0$ *tale che per ogni* $y_1,y_2\in\mathbb{R}^d$ *e per ogni* $t\in[0,T]$

$$|b(t,y_1)-b(t,y_2)|^2+|\sigma(t,y_1)-\sigma(t,y_2)|^2\leq K_1|y_1-y_2|^2;$$

(b) esista $K_2>0$ *tale che per ogni* $y\in\mathbb{R}^d$ *e per ogni* $t\in[0,T]$

$$|b(t,y)|^2+|\sigma(t,y)|^2\leq K_2(1+|y|^2).$$

Allora esiste un'unica soluzione $Z=(Z_t)_{t\geq 0}$ *di* (2.4). *Il processo* Z *è continuo e adattato.*

Dimostrazione. Definiamo la successione di processi:

$$\begin{aligned} &Z_t^0=x_0\\ &Z_t^{n+1}=Z_0+\int_0^t r(s,Z_{s-}^n)ds+\int_0^t\sigma(s,Z_{s-}^n)dW_s\ \forall n\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

Si verifica induttivamente che ogni Z^n è un processo adattato a traiettorie continue, quindi in particolare:

$$Z_t^{n+1}=Z_0+\int_0^t r(s,Z_s^n)ds+\int_0^t\sigma(s,Z_s^n)dW_s\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |Z_t^1-Z_t^0|^2 &= \Big|\int_0^t r(s,x_0)ds+\int_0^t\sigma(s,x_0)dW_s\Big|^2\\ &\leq 2\left[\left(\int_0^t r(s,x_0)ds\right)^2+\left(\int_0^t\sigma(s,x_0)dW_s\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Applicando la diseguaglianza di Doob, l'isometria di Itô e la condizione *(a)* si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sup_{0\le t\le T}|Z_t^1-Z_t^0|^2\right] \\
\le\ & 2\left(E\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t r(s,x_0)ds\right)^2\right]+8E\left[\left(\int_0^T\sigma(s,x_0)ds\right)^2\right]\right) \\
\le\ & 2\left[K_2T^2(1+E[x_0^2])+4K_2(1+E[x_0^2])\right],
\end{aligned}
$$

e quindi se $C=\max\{2T,8\}$

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|Z_t^1-Z_t^0|^2\right]\le CK_2(1+E[x_0]^2). \tag{2.5}$$

Consideriamo ora il caso generale per $n\in\mathbb{N}$; ragionando come prima si ottiene:

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|Z_t^{n+1}-Z_t^n|^2\right]\le CK_1\int_0^T E\left[\sup_{0\le s\le t}|Z_t^n-Z_t^{n-1}|^2\right]dt, \tag{2.6}$$

e per induzione basata su (2.5) e (2.6) si deduce che

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}|Z_t^n-Z_t^{n-1}|^2\right]\le\frac{(CT)^nK_3^n}{n!}, \tag{2.7}$$

dove $K_3^n=\max\{K_1,K_2(1+E[x_0^2])\}$. Da questo si ricava che, per ogni $t\ge 0$, $(Z_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, infatti per ogni $0\le m\le n\in\mathbb{N}$ e per ogni $t\in[0,T]$

$$||Z_t^n-Z_t^m||_2=\sum_{r=m+1}^n||Z_t^r-Z_t^{r-1}||_2\le\sum_{r=m+1}^n\left(\frac{(CT)^rK_3^r}{r!}\right)^{\frac12}.$$

Chiamiamo $Z=(Z_t)_{0\le t\le T}$ il limite delle Z^n; passando al limite l'equazione precedente otteniamo:

$$||Z_t-Z_t^n||_2=\sum_{r=n+1}^\infty\left(\frac{(CT)^rK_3^r}{r!}\right)^{\frac12},$$

per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $0\le t\le T$. La convergenza è anche uniforme: lo si ricava dalla (2.7) applicando la disuguaglianza di Chebyshev e poi il lemma di Borel-Cantelli, quindi Z è anche continuo e adattato.

Verifichiamo che Z soddisfa la (2.4). Se $\tilde Z$ verifica

$$\tilde Z_t=x_0+\int_0^t r(s,\tilde Z_s)ds+\int_0^t\sigma(s,\tilde Z_s)dW_s,$$

analogamente a prima otteniamo per ogni $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} E\left[|\tilde{Z}_t - Z_t^n|^2\right] &\leq CK_1 \int_0^t E[|\tilde{Z}_s - Z_s^n|^2]ds \\ &\leq CTK_1 \sup_{0\leq s\leq T} E[|\tilde{Z}_s - Z_s^n|^2] \\ &\leq CTK_1 \left(\sum_{r=n+1}^{\infty} \left(\frac{(CT)^r K_3^r}{r!}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &\to 0 \quad \text{quando } n \to \infty. \end{aligned}$$

Dall'unicità del limite segue che $Z_t = \tilde{Z}_t$ q.o.

Dimostriamo ora l'unicità. Siano Z_1 e Z_2 due soluzioni distinte di (2.4). Ripetendo gli stessi ragionamenti di prima otteniamo:

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |(Z_1)_t - (Z_2)_t|^2\right] \leq CK_1 \int_0^T E\left(\sup_{0\leq s\leq t} |(Z_1)_t - (Z_2)_t|^2\right) dt,$$

dal lemma di Gronwall segue che $E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |(Z_1)_t - (Z_2)_t|^2\right] = 0$. Quindi per ogni $0 \leq t \leq T$, $(Z_1)_t = (Z_2)_t$ quasi ovunque e per continuità

$$\mathbb{P}((Z_1)_t = (Z_2)_t, \forall t \geq 0) = 1.$$

□

Ora possiamo costruire una soluzione di (2.2) sfruttando il fatto che i tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\geq 0}$ non si addensano, infatti il processo $\sum_{j\leq P_t} U_j$, a differenza di un generico processo di Lèvy, ha solo salti "ben distanziati" e non presenta piccoli salti che si accumulano, che rendono più complessa la ricerca di soluzioni ad un'equazione differenziale stocastica nel caso generale.

Teorema 2.5. *Esiste un'unica soluzione X càdlàg e adattata dell'equazione* (2.2)

Dimostrazione. Sia $(\tau_n)_{n\geq 0}$ la successione di tempi d'arresto del processo di Poisson (P_t). Costruiamo la soluzione ricorsivamente come segue:

$$\begin{array}{lll} X_t(\omega) = Z_t(\omega) & \text{per} & t \in [0, \tau_1(\omega)] \\ X_t(\omega) = (1 + U_1(\omega))Z_{\tau_1-(\omega)}(\omega) & \text{per} & t = \tau_1(\omega) \\ X_t(\omega) = X_{\tau_1(\omega)}(\omega) + (Z_1)_t(\omega) - (Z_1)_{\tau_1}(\omega) & \text{per} & t \in [\tau_1(\omega), \tau_2(\omega)] \\ X_t(\omega) = (1 + U_2(\omega))Z_{\tau_2-}(\omega) & \text{per} & t = \tau_2(\omega) \\ \vdots & & \end{array}$$

Abbiamo indicato con Z_1 l'unica soluzione di (2.4) con condizione iniziale $(Z_1)_0 = X_{\tau_1}$. Per costruzione X è adattato, càdlàg e soddisfa (2.2).

L'unicità segue dal teorma precedente e dalla costruzione fatta.

□

Capitolo 3

Teorema di Girsanov-Meyer

Consideriamo due probabilità equivalenti $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$: dato che $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ esiste una variabile aleatoria $Z \in L^1(d\mathbb{P})$ tale che $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z$ e chiamiamo

$$Z_t = E^{\mathbb{P}}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_t\right]. \tag{3.1}$$

Teorema 3.1. Girsanov-Meyer *Siano $\mathbb{P}$ e $\mathbb{Q}$ due probabilità equivalenti, e sia (Z_t) il processo definito dalla* (3.1), *che supporremo di quadrato integrabile. Sia M una $\mathbb{P}$-martingala locale, allora*

$$M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z,M]_s$$

è una $\mathbb{Q}$-martingala locale.

Prima di dimostrare il teorema premettiamo il seguente risultato.

Lemma 3.2. *Se $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ e (Z_t) è il processo definito dalla* (3.1), *un processo (M_t) adattato e càdlàg è una $\mathbb{Q}$-martingala locale se e solo se $(M_t Z_t)$ è una $\mathbb{P}$-martingala locale.*

Dimostrazione. (Lemma 3.2) Il risultato, per una martingala, si ottiene da:

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}[M_t - M_s\big|\mathcal{F}_s] &= E^{\mathbb{P}}[Z(M_t - M_s)\big|\mathcal{F}_s] = E^{\mathbb{P}}[ZM_t\big|\mathcal{F}_s] - M_s Z_s \\ &= E^{\mathbb{P}}[E^{\mathbb{P}}[ZM_t\big|\mathcal{F}_t]\big|\mathcal{F}_s] - M_s Z_s \\ &= E^{\mathbb{P}}[Z_t M_t - Z_s M_s\big|\mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

Il risultato per una martingala locale si ottiene scegliendo una successione localizzante di tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\geq 0}$. □

Dimostrazione. (Teorema 3.1) Dato che (M_t) e (Z_t) sono martingale locali, sono anche delle semimartingale e

$$\int Z_- dM + \int M_- dZ$$

è anche'essa una martingala locale. Sfruttando la formula di integrazione per parti otteniamo che

$$ZM - [Z, M] = \int Z_- dM + \int M_- dZ \tag{3.2}$$

è una $\mathbb{P}$-martingala locale. Poiché (Z_t) è una versione di $E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t\right]$, $(\frac{1}{Z_t})$ è una versione càdlàg di $E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_t\right]$, e quindi è una $\mathbb{Q}$-semimartingala. Moltiplicando l'equazione (3.2) per $\frac{1}{Z}$ otteniamo:

$$M - \frac{1}{Z}[Z, M] = \frac{1}{Z}\left(\int Z_- dM + \int M_- dZ\right)$$

che è una $\mathbb{Q}$-martingala (segue dal lemma 3.2, perché, moltiplicando $M - \frac{1}{Z}[Z, M]$ per Z, si ottiene una $\mathbb{P}$-martingala locale). Sfruttando ancora l'integrazione per parti, ma sotto $\mathbb{Q}$, si ha:

$$\frac{1}{Z}[Z, M] = \int \frac{1}{Z_-} d[Z, M] + \int [Z, M]_- d\left(\frac{1}{Z}\right) + \left[[Z, M], \frac{1}{Z}\right].$$

Dato che $\frac{1}{Z}$ è una $\mathbb{Q}$-martingala locale, anche $N = \int [Z, M]_- d\left(\frac{1}{Z}\right)$ lo è. Possiamo quindi riscrivere l'equazione precedente:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Z_t}[Z, M]_t &= \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d[Z, M]_s + N_t + \left[[Z, M], \frac{1}{Z}\right]_t \\
&= \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d[Z, M]_s + N_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta\left(\frac{1}{Z}\right)\Delta[Z, M]_s \\
&= \int_0^t \frac{1}{Z_s} d[Z, M]_s + N_t
\end{aligned}$$

e concludere che

$$\begin{aligned}
N + M - \frac{1}{Z}[Z, M] &= N + M - \int \frac{1}{Z} d[Z, M] - N \\
&= M - \int \frac{1}{Z} d[Z, M]
\end{aligned}$$

è una $\mathbb{Q}$-martingala locale (essendo la somma di due $\mathbb{Q}$-martingale locali). $\square$

Ricordando che se (H_t) è un processo adattato e càdlàg il compensatore prevedibile di $\int_0^t H_s dA_s$ è $\int_0^t H_{s-} dA_s^p$, otteniamo una versione "prevedibile" del teorema precedente nel caso in cui (M_t) e (Z_t) siano delle martingale localmente di quadrato integrabile; cioè si ha che:

$$M - \int \frac{1}{Z_-} d\langle Z, M\rangle$$

è una martingala locale secondo la probabilità $\mathbb{Q}$.

Vediamo in due casi particolari l'applicazione del teorema precedente.

3.1 Applicazione ad un processo di Wiener

Supponiamo che il processo (Z_t) verifichi la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} dZ_t = H_t Z_t dW_t \\ Z_0 = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

dove W_t è un processo di Wiener standard rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$. Allora dal teorema 2.1 si ha:

$$Z_t = \exp\left[\int H_s dW_s - \frac{1}{2}\int H_s^2 ds\right].$$

Il teorema di Girsanov-Meyer ci garantisce che il processo

$$\begin{aligned} W_t^* &= W_t - \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d\langle Z, W\rangle_s \\ &= W_t - \int_0^t \frac{1}{Z_s} d\langle Z, W\rangle_s \\ &= W_t - \int_0^t H_s ds \end{aligned}$$

è una martingala sotto la probabilità $\mathbb{Q}$. Osserviamo inoltre che $W_0^* = 0$ e che per ogni $t \geq 0$, $\langle W^*\rangle_t = \langle W - \int_0 H_s ds\rangle_t = \langle W\rangle_t = t$. Possiamo concludere che (W_t^*) è un processo di Wiener standard sotto la probabilità $\mathbb{Q}$ grazie al

Teorema 3.3. (Teorema di Lévy) *Un processo stocastico $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Wiener standard se e solo se è una martingala locale continua tale che $\langle X, X\rangle_t = t$.*

Dimostrazione. Si veda [19] □

Tutte le probabilità equivalenti $\mathbb{Q}$ hanno una densità (Z_t) che verifica l'equazione (3.3): è una conseguenza del seguente

Teorema 3.4. (Rappresentazione delle martingale) *Se $\mathcal{F}_t$ è la minima filtrazione generata dal processo di Wiener (W_t) e (M_t) è una martingala locale, allora esiste un processo progressivamente misurabile (H_s) tale che:*

$$M_t = M_0 + \int_0^t H_s dW_s.$$

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il teorema nel caso in cui (M_t) sia una martingala di quadrato integrabile.

Se l'insieme dei tempi ha un istante finale T, ogni martingala è univocamente determinata dalla conoscenza dal suo valore all'istante T, infatti:

$M_t = E\left[M_T \middle| \mathcal{F}_t\right]$. Pertanto è sufficiente verificare che ogni $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ si scrive nella forma

$$X = E[X] + \int_0^T H_s dW_s, \tag{3.4}$$

per un'opportuna martingala di quadrato integrabile (H_t). Dall'isometria di Itô si deduce che le variabili aleatorie che verificano (3.4) formano un sottospazio chiuso di $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, pertanto ci siamo ridotti a dimostrare che ogni variabile aleatoria di quadrato integrabile che sia ortogonale alle costanti e agli integrali rispetto a (W_t) è nulla quasi certamente.

Sia Y ortogonale alle costanti e agli integrali rispetto a (W_t). Allora, dall'ortogonalità rispetto alle costanti segue che $E[Y^+] = E[Y^-]$ (possiamo supporre che siano uguali a 1). Definiamo le due probabilità $\mathbb{P}^1 = (Y^+)\mathbb{P}$ e $\mathbb{P}^2 = (Y^-)\mathbb{P}$. Y è ortogonale agli integrali stocastici e dunque anche ai processi della forma: $e^{\int_0^t h(s)dW_s}$ con $h(s) = \sum_{i=1}^n u_i \chi_{]t_{i-1},t_i]}$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots t_n \leq T$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$. A parte un fattore deterministico questi processi coincidono con gli esponenziali di Wiener, cioè le soluzioni di

$$\begin{cases} d\varepsilon(h)_t = h(t)\varepsilon(h)_t dW_t \\ \varepsilon(h)_0 = 1, \end{cases}$$

che sono martingale di quadrato integrabile se $h \in L^2(0, T)$.

L'ortogonalità si esprime dunque così:

$$E\left[Y e^{u_1 W_{t_1} + u_2(W_{t_2} - W_{t_1}) + \ldots + u_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})}\right] = 0,$$

o equivalentemente:

$$E\left[Y^+ e^{u_1 W_{t_1} + \ldots + u_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})}\right] = E\left[Y^- e^{u_1 W_{t_1} + \ldots + u_n(W_{t_n} - W_{t_{n-1}})}\right].$$

Pertanto le variabili $W_{t_1}, (W_{t_2} - W_{t_1}), \ldots, (W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ hanno la stessa funzione generatrice dei momenti secondo le probabilità $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$ e quindi la stessa legge di probabilità per entrambe le probabilità. Allora $\mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$ coincidono sulla tribù generata al variare di n e $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots \leq t_n < T$ da queste variabili aleatorie, cioè su $\mathcal{F}_T$.

Possiamo concludere che $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^2$, cioè $Y^+ = Y^-$ q.c. e quindi $Y = 0$ quasi certamente.

Estendiamo ora il risultato alle martingale locali. Si può verificare che ogni martingala locale ha traiettorie continue. Consideriamo dunque la successione di tempi d'arresto

$$\tau_n = \inf\{s \geq 0 : |M_s| \geq n\} \wedge T.$$

È sufficiente applicare quanto appena dimostrato alle martingale arrestate $(M_t^{\tau_n})$. □

Con poche modifiche questo risultato si estende anche al caso vettoriale.

Il teorema di rappresentazione delle martingale ci permette di caratterizzare tutte le probailità equivalenti ad una data probabilità $\mathbb{P}$.

Teorema 3.5. *Se $\mathcal{F}_t$ è la filtrazione generata dal processo di Wiener (W_t), e se $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$, allora esiste (H_t) tale che*

$$Z_t = E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \big| \mathcal{F}_t\right]$$

soddisfa l'equazione

$$\begin{cases} dZ_t = H_t Z_t dW_t \\ Z_0 = 1. \end{cases}$$

Dimostrazione. Chiamiamo $Z_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ e $Z_t = E[Z_T \big| \mathcal{F}_t]$. Osserviamo che, per ogni t fissato, la variabile aleatoria Z_t, essendo la densità di probabilià di $\mathbb{Q}$ rispetto a $\mathbb{P}$ ristretta a $\mathcal{F}_t$, è strettamente positiva $\mathbb{P}$-quasi certamente, di conseguenza $\{(\omega, t) : Z_t(\omega) = 0\}$ è $\mathbb{P} \otimes \Lambda^+$-trascurabile (con Λ^+ indichiamo la misura di Lebesgue su $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$).

Dal teorema di rappresentazione delle martingale Z_t soddisfa un'equazione del tipo:

$$\begin{cases} dZ_t = K_t dW_t \\ Z_0 = 1, \end{cases}$$

che possiamo riscrivere

$$\begin{cases} dZ_t = \frac{K_t}{Z_t} Z_t dW_t \\ Z_0 = 1 \end{cases}$$

ottenendo la tesi. □

3.2 Applicazione ad una misura aleatoria

Supponiamo ora che il processo (Z_t) verifichi la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} dZ_t = Z_{t-} dN_t \\ Z_0 = 1 \end{cases} \tag{3.5}$$

dove $N_t = \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} H_s d(\mu - \nu)$ è una martingala. Il teorema di **Girsanov-Meyer** fornisce una relazione tra le martingale locali sotto $\mathbb{P}$ e sotto $\mathbb{Q}$. Se K è una funzione $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabile tale che $K * \mu(\cdot, dt, dx) \in \mathcal{A}^+_{loc}$, per definizione di compensatore

$$M_t = \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} K(\mu(\cdot, dt, dx) - \nu(\cdot, dt, dx))$$

è una martingala locale sotto $\mathbb{P}$ e dunque, per il teorema precedente,

$$\begin{aligned} M_t - \int_0^t \frac{1}{Z_{s-}} d < Z, M >_s &= M_t - \int_0^t d < M, N >_s \\ &= M_t - \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} KX d\nu(\cdot, dt, dx) \\ &= \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} K(\mu(\cdot, dt, dx) - (1+X)\nu(\cdot, dt, dx)) \end{aligned}$$

è una martingala locale sotto $\mathbb{Q}$, il che equivale a dire che

$$\nu^{\mathbb{Q}} = (1+X)\nu(\cdot, dt, dx)$$

è il compensatore di $\mu(\cdot, dt, dx)$ sotto $\mathbb{Q}$.

Osservazione 3.6. *Se $N_t = \sum_{n \leq P_t} U_n$ è un processo di Poisson composto (P_t è un processo di Poisson di intensità λ e $(U_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie indipendenti equidistribuite di legge $F(dx)$), indichiamo con $\mu(\cdot, dt, dx)$ la misura aleatoria di Poisson ad esso associata, cioè $\mu(\cdot, dt, dx) = \sum_{n\geq 0} \delta_{(\tau_n, U_n)}$; il suo compensatore è $\nu(\cdot, dt, dx) = \lambda dt F(dx)$. L'espressione esplicita del compensatore $\nu^{\mathbb{Q}}$ che abbiamo appena ricavato,ci permette, in alcuni casi particolari, di dedurre la legge del processo N_t sotto la nuova probabilità $\mathbb{Q}$:*

(a) se $X = c$ è costante $\nu^{\mathbb{Q}}(\cdot, dt, dx) = (1+c)\lambda dt F(dx)$, per il teorema 1.19 *$N_t$ è ancora un processo di Poisson composto;*

(b) se $X = h(t)$ allora $\nu^{\mathbb{Q}}(\cdot, dt, dx) = (1+h(t))\lambda dt F(dx)$, N_t è ancora a incrementi indipendenti, ma non è più un processo di Poisson;

(c) se $X = k(x)$ e $\int_{\mathbb{R}} k(x)F(dx) = 0$, allora

$$\nu^{\mathbb{Q}}(\cdot, dt, dx) = (1 + k(x))\lambda dt F(dx)$$

e il processo N_t è ancora un processo di Poisson composto di densità λ ma con una diversa distribuzione dei salti;

(d) se $X = k(x)$ e $\int_{\mathbb{R}} k(x)F(dx) \in \mathbb{R} - \{0\}$, allora

$$\begin{aligned} \nu^{\mathbb{Q}}(dt, dx) &= (1 + k(x))\lambda dt F(dx) \\ &= \tilde{\lambda} dt \frac{(1+k(x))}{\int_{\mathbb{R}}(1+k(x))F(dx)} F(dx), \end{aligned}$$

e N_t è ancora un processo di Poisson composto di cui è cambiata l'intensià ($\tilde{\lambda} = \lambda(\int_{\mathbb{R}} 1 + k(x))F(dx)dt$) e anche la legge dei salti.

(e) se X ha una forma diversa dalle precedenti, in generale N_t non è più un processo di Poisson, né ha incrementi indipendenti.

Teorema 3.7. *Supponiamo che μ sia una misura aleatoria σ-finita della forma:*

$$\mu(\omega, dt, dx) = \sum_{n\geq 0} \delta_{(\tau_n, U_n)} \tag{3.6}$$

e che $(\mathcal{F}_t)$ sia la più piccola tribù che rende μ opzionale. Allora ogni martingala locale ha la forma:

$$M_t = M_0 + H * \mu_t - H * \nu_t. \tag{3.7}$$

dove H è una funzione $\tilde{\mathcal{P}}$-misurabile tale che $H * \mu$ è localmente integrabile.

Dimostrazione. Si veda [11] □

Teorema 3.8. *Nelle stesse ipotesi del teorema precedente, se $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ esiste (H_t) tale che*

$$Z_t = E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t\right]$$

soddisfa l'equazione (3.5)*.*

Dimostrazione. Analoga a quella del teorema 3.5 ma con una differenza: ora bisogna verificare che l'insieme $\{(\omega, t) : Z_{t-}(\omega) = 0\}$ sia $\mathbb{P}\otimes\Lambda^+$-trascurabile. Questo segue dal

Lemma 3.9. *Sia Z una $\mathbb{P}$-supermartingala non negativa. Allora $T = \inf\{t : Z_t = 0 \text{ o } Z_{t-} = 0\}$ è un tempo d'arresto e $Z = 0$ $\mathbb{P}$-quasi ovunque su $\{(\omega, t) : t \in \mathbb{R}_+, T(\omega) \leq t < \infty\}$.*

(si veda [11] pag. 167) □

Supponiamo ora che sullo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ siano definiti sia un processo di Wiener, che la misura aleatoria $\mu(\cdot, dt, dx)$ ed il suo compensatore $\nu(\cdot, dt, dx)$, e che $\{\mathcal{F}_t\}$ sia la minima filtrazione che, allo stesso tempo, è generata dal processo di Wiener W_t e rende μ opzionale. Per semplicità possiamo vedere Ω ome uno spazio prodotto: $\Omega = \Omega^W \times \Omega^\mu$ e $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \otimes \mathcal{F}_t^\mu$ ($\mathcal{F}_t^W$ è la filtrazione generata da W e $\mathcal{F}_t^\mu$ è la più piccola filtrazione che rende μ opzionale). Anche in questo caso possiamo enunciare un teorema di rappresentazione delle martingale.

Teorema 3.10. *Ogni martingala di quadrato integrabile (M_t) rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^W \otimes \mathcal{F}_t^\mu$ può essere scritta nella forma:*

$$M_t(\omega^W, \omega^\mu) = M_0 + \int_0^t H_s(\omega^W, \omega^\mu) dW_s(\omega^W) \tag{3.8}$$

$$+ \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} K(\omega^W, \omega^\mu, s, x)(\mu - \nu)(\omega^\mu, ds, dx),$$

con H prevedibile e K $\tilde{\mathbb{P}}$-misurabile e tali che

$$E\left[\int_0^T H_s(\omega^W)^2 ds + \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} K^2(\omega^W,\omega^\mu,s,x)d\nu(\omega^\mu,ds,dx)\right] < \infty. \tag{3.9}$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{M}$ l'insieme delle martingale che ammettono una rappresentazione della forma (3.8). $\mathcal{M}$ è stabile per combinazioni lineari e contiene le martingale (M_t) tali che $M_T(\omega^W,\omega^\mu) = F(\omega^W)G(\omega^\mu)$, infatti esistono (H_t) prevedibil e K $\tilde{\mathbb{P}}$-misurabile e che verificano (3.9) tali che

$$F(\omega^W) = F_0 + \int_0^t H_s(\omega^W)dW_s(\omega^W)$$

e

$$G(\omega^\mu) = G_0 + \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} K(\omega^\mu,s,x)(\mu-\nu)(\omega^\mu,ds,dx).$$

Consideriamo le martingale $R_t = E[F|\mathcal{F}_t]$ e $S_t = E[G|\mathcal{F}_t]$. Dalla formula di Itô si ha

$$FG = F_0G_0 + \int_0^T S_sH_sdW_s + \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} R_sK(\cdot,s,x)(\mu-\nu)(ds,dx).$$

Quindi $\{M_T : M \in \mathcal{M}\}$ è denso in $L^2(\Omega^W\times\Omega^\mu,\mathcal{F}_t^W\otimes\mathcal{F}_t^\mu,\mathbb{P})$. Infine la $M \to E[M_T^2]$ è un'iniezione isometrica da $\mathcal{M}$ in $L^2(\Omega^W\times\Omega^\mu,\mathcal{F}_t^W\otimes\mathcal{F}_t^\mu,\mathbb{P})$ e questo ci permette di concludere. $\square$

Con gli stessi ragionamenti seguiti nel teorema 3.5 si verifica che

Teorema 3.11. *Supponiamo ora che sullo spazio $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ siano definiti sia un processo di Wiener, che la misura aleatoria $\mu(\cdot,dt,dx)$ ed il suo compensatore $\nu(\cdot,dt,dx)$, e che $\{\mathcal{F}_t\}$ sia la minima filtrazione che, allo stesso tempo, è generata dal processo di Wiener W_t e rende μ opzionale. Se $\mathbb{Q}\sim\mathbb{P}$, allora esistono i processi (H_t) e $(K(t,\cdot))$ tali che*

$$Z_t = E\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t\right]$$

soddisfi l'equazione

$$\begin{cases} dZ_t = H_tZ_{t-}dW_t + K(t,\cdot)Z_{t-}d(\mu-\nu) \\ Z_0 = 1. \end{cases}$$

Esplicitiamo, grzie al teorema 2.1, il calcolo di Z_t, che ci sarà utile in seguito:

$$\begin{aligned} Z_t &= \exp\left[\int_0^t H_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds \right.\\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(s,\cdot)(\mu - \nu)(ds, dx) \\ &\quad \left. - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} K(s,\cdot) - \log(1 + K(s,\cdot))u(ds, dx)\right]. \end{aligned}$$

Per completare la presentazione delle proprietà dei processi (W_t) e (P_t) esponiamo un risultato, semplice conseguenza della formula di Itô, che garantisce l'indipendenza di (W_t) e (P_t) quando siano entrambi adattati alla stessa filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}$.

Teorema 3.12. *Sia (W_t) un processo di Wiener e sia (P_t) un processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$, entrambi definiti sullo stesso spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e relativi alla stessa filtrazione $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$. Allora i processi (W_t) e (P_t) sono indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$; definiamo:

$$Y_t = \exp[u_1 W_t + u_2 P_t - \frac{1}{2}u_1^2 t - \lambda(e^{u_2} - 1)t]$$

e

$$X_t = u_1 W_t + u_2 P_t - \frac{1}{2}u_1^2 t - \lambda(e^{u_2} - 1)t.$$

Allora $Y_t = f(X_t)$, con $f(x) = e^x$, e possiamo applicare la formula di Itô. Ricordando che $Y_s = Y_{s-}e^{u_2}$ e quindi $Y_s - Y_{s-} = (e^{u_2} - 1)Y_{s-}\Delta P_s$ e che, dato che Y ha solo un numero finito di salti nell'intervallo $[0, t]$, $\int_0^t Y_s ds =$

$\int_0^t Y_{s-}ds$, otteniamo:

$$\begin{aligned}
Y_t &= f(X_t) \\
&= f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d < X^c >_s \\
&\quad + \sum_{s\leq t}\left[f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s^-})\Delta X_s\right] \\
&= 1 + \int_0^t Y_{s-}dX_s^c + \frac{1}{2}u_1^2\int_0^t Y_{s-}ds + \sum_{s\leq t}[Y_s - Y_{s-}] \\
&= 1 + u_1\int_0^t Y_s dW_s - \frac{1}{2}u_1^2\int_0^t Y_s ds - \lambda(e^{u_2}-1)\int_0^t Y_s ds \\
&\quad + \frac{1}{2}u_1^2\int_0^t Y_{s-}ds + \sum_{s\leq t}[Y_s - Y_{s-}] \\
&= 1 + u_1\int_0^t Y_s dW_s - \lambda(e^{u_2}-1)\int_0^t Y_s ds + (e^{u_2}-1)\int_0^t Y_{s-}dP_s \\
&= 1 + u_1\int_0^t Y_s dW_s + (e^{u_2}-1)\int_0^t Y_{s-}d\tilde{P}_s,
\end{aligned}$$

dove $\tilde{P}_s = P_s - \lambda s$ è il processo di Poisson compensato. Quindi (Y_t) è una martingala e dato che $Y_0 = 1$ si ha $E[Y_t] = 1$ per ogni $t \geq 0$. Si ottiene dunque la funzione generatrice dei momenti:

$$E[e^{u_1 W_t + u_2 P_t}] = e^{\frac{1}{2}u_1^2 t}e^{\lambda t(e^{u_2}-1)},$$

che è il prodotto delle due funzioni generatrici dei momenti

- di W_t: $E[e^{u_1 W_t}] = e^{\frac{1}{2}u_1^2 t}$,
- di P_t: $E[e^{u_2 P_t}] = e^{\lambda t(e^{u_2}-1)}$;

possiamo quindi concludere che per ogni $t \geq 0$, le variabili aleatorie W_t e P_t sono indipendenti. Analogamente a quanto appena fatto si verifica che per ogni n-upla $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ i due vettori $(W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})$ e $(P_{t_1} \ldots, P_{t_n})$ sono indipendenti e quindi lo sono anche i processi (W_t) e (P_t). $\square$

Osservazione 3.13. *Un processo di Wiener (W_t) e un processo di Poisson composto $(N_t) = (\sum_{n\leq P_t} U_n)$ relativi alla stessa filtrzione $\{\mathcal{F}_t\}$ non sono necessariamente indipendenti: basta prendere, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $U_n = f(W)$.*

Capitolo 4

Calcolo di Malliavin

4.1 Caso Wiener

Iniziamo richiamando una delle possibili definizioni di processo di Wiener, che ci permette di introdurre agevolmente l'integrale di Wiener.

Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti di legge $\mathcal{N}(0,1)$ e $(g_n)_{n\geq 1}$ un sistema ortonormale completo di $L^2(0,T)$.

Indichiamo con
$$G_i(t) = \int_0^t g_i(s)ds$$
e chiamiamo
$$W_t(\omega) = \sum_{i\geq 1} X_i(\omega)G_i(t).$$
Il processo $(W_t)_{t\geq 0}$ che risulta così definito è un processo di Wiener con traiettorie irregolari. Ne consideriamo la versione a traiettorie continue.

Se $h \in L^2(0,T)$ definiamo l'**integrale di Wiener**
$$W(h) = \int_0^T h(s)ds = \sum_{i\geq 1} \langle g_i, h\rangle_{L^2(0,T)} X_i(\omega).$$

Osservazione 4.1. *Si ha:*
$$\langle W(h), W(k)\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle h, k\rangle_{L^2(0,T)}.$$

Supponiamo, da ora in poi, che lo spazio Ω sia lo spazio canonico di Wiener $\Omega = \mathcal{C}^0([0,T])$, su cui $W_t(\omega) = \omega(t)$. Definiamo il **sottospazio di Cameron-Martin**
$$\mathrm{CM} = \left\{ h^*(t) \in \Omega : \exists h \in L^2(0,T), h^*(t) = \int_0^t h(s)ds \right\}.$$
Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme dei **funzionali lisci** , cioè le variabili aleatorie $F : \Omega \to \mathbb{R}$ della forma
$$F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \tag{4.1}$$

dove $h_1, \dots, h_n \in L^2(0,T)$ e $f \in \mathcal{C}_p^\infty$, cioè è infinitamente derivabile e tutte le sue derivate hanno crescita al più polinomiale.

Teorema 4.2. *$\mathcal{S}$ è denso in $L^2(\Omega)$.*

Sia $h \in L^2(0,T)$, definiamo l' **esponenziale di Wiener**

$$\varepsilon(h) = \exp\left[\int_0^T h(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)ds\right].$$

Chiamiamo $\mathcal{E}$ l'insieme dei **polinomi esponenziali**, costituito dalle combinazioni lineari di esponenziali di Wiener.

Teorema 4.3. *$\mathcal{E}$ è denso in $L^2(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $X \in L^2(\Omega)$ ortogonale a tutti gli esponenziali di Wiener. Allora per ogni $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ si ha

$$E\left[Xe^{a_1 W_{t_1} + \ldots + a_n W_{t_n}}\right] = 0.$$

Analogamente a quanto visto nella dimostrazione del teorema di rappresentazione delle martingale si verifica che X è nullo quasi certamente. □

4.1.1 Decomposizione in caos di Wiener

Sia $S_n = \{(t_1, \dots t_n) \subset [0,T]^n : 0 < t_1 < \ldots < t_n < T\}$ il simplesso n-dimensionale. Presa $f \in L^2(S_n)$ definiamo

$$J_n(f) = \int_0^T dW_{t_n} \int_0^{t_n} dW_{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
E[J_n(f)^2] &= \int_0^T dt_n E\left[\left(\int_0^{t_n} dW_{t_{n-1}} \cdots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dW_{t_1}\right)^2\right] \\
&\vdots \\
&= \int_{S_n} f^2(t_1, \dots, t_n) t_1 \dots t_n \\
&= \| f \|^2_{L^2(S_n)},
\end{aligned}$$

e questa relazione si può generalizzare: per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per $f \in L^2(S_n)$ e $g \in L^2(S_m)$

$$E\left[J_n(f)J_m(g)\right] = \begin{cases} < f, g >_{L^2(S_n)} & se\ n = m \\ 0\ se\ n \neq m. \end{cases}$$

Sia $C_n = J_n(L^2(S_n))$ possiamo scomporre lo spazio $L^2(\Omega)$ nella somma diretta

$$L^2(\Omega) = C_0 \oplus C_1 \oplus \ldots \oplus V,$$

dove V è l'ortogonale a $\bigoplus_{n \ge 0} C_n$.

Proviamo che $V = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo l'esponenziale di Wiener $\varepsilon(h)$; la sua proiezione ortogonale su C_n è $J_n(h^{\otimes n})$ e inoltre $E[\varepsilon(h)^2] = \sum_{n\geq 0} \| h^{\otimes n} \|^2_{L^2(S_n)}$, quindi $\mathcal{E} \subset \bigoplus_{n\geq 0} C_n$; poiché i polinomi esponenziali sono densi in $L^2(\Omega)$ otteniamo la **decomposizione in caos di Wiener**:

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{n\geq 0} C_n. \tag{4.2}$$

□

Dunque ogni $F \in L^2(\Omega)$ si può scrivere

$$F = \sum_{n\geq 0} J_n(f_n)$$

con $\| F \|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n\geq 0} \| f_n \|_{L^2(S_n)} < \infty$.

Esempio 4.4. *Consideriamo l'esponenziale di Wiener $\varepsilon(h)$: la sua proiezione ortogonale su C_n è $J_n(h^{\otimes n})$.*

Osservazione 4.5. *Consideriamo $f \in L^2([0,T]^n)$ **simmetrica**, cioè tale che per ogni permutazione σ su $\{0,\dots,n\}$, $f(t_1,\dots,t_n) = f(t_{\sigma(1)},\dots,t_{\sigma(n)})$. Allora*

$$\int_{[0,T]^n} f(t_1,\dots,t_n)dt_1,\dots,dt_n = n! \int_{S_n} f(t_1,\dots,t_n)dt_1\dots dt_n.$$

Possiamo quindi definire:

$$\begin{aligned} I_n(f) &= \int_{[0,T]^n} f(t_1,\dots,t_n)dW_{t_1}\dots dW_{t_n} \\ &= n! \int_{S_n} f(t_1,\dots,t_n)dW_{t_1}\dots dW_{t_n}, \end{aligned}$$

per cui si ha:

$$E\left[I_n(f)^2\right] = (n!)^2 \int_{S_n} f^2 dt_1\dots dt_n = n! \int_{[0,T]^2} f^2 dt_1 \dots dt_n.$$

Quindi ogni $F \in L^2(\Omega)$ si può scrivere

$$F = \sum_{n\geq 0} I_n(f_n),$$

con $\sum_{n\geq 0} n! \| f_n \|^2_{L^2([0,T]^n)} < \infty$ e in cui ogni f_n è simmetrica su $[0,T]^n$.

4.1.2 Derivata di Malliavin e integrale di Skorohod

Vorremmo ora definire la derivata DF di un funzionale $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di quadrato integrabile, cioè differenziare F rispetto al parametro $\omega \in \Omega$. Una prima difficoltà che ci si presenta è data dal fatto che F è definita $\mathbb{P}$-quasi certamente e generalmente non è neppure continua; quindi possiamo solo definire una derivata in senso debole. In particolare l'idea che seguiremo è quella di fare variare il parametro ω nelle direzioni dello spazio di Cameron-Martin; cerchiamo cioè un processo $(D_t F(\omega) \in L^2(\Omega \times [0,T])$ tale che, per ogni $h^* \in \mathrm{CM}$, si abbia:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(\omega + \varepsilon h^*) - F(\omega)}{\varepsilon} = \int_0^T h(t) D_t F(\omega) dt. \tag{4.3}$$

Se $k \in L^2(0,T)$ allora

$$W(k)(\omega + \varepsilon h^*) = W(k)(\omega) + \varepsilon \int_0^T h(s)k(s)ds,$$

e quindi $D_t(W(k)) = k(t)$. Pertanto la derivata di Malliavin di un funzionale liscio F della forma (4.1) è il processo stocastico $(D_t F)_{t \in [0,T]}$ dato da

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) h_i(t).$$

Più in generale

$$D_h F =< DF, h >= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) < h_i, h >_{L^2(0,T)} . \tag{4.4}$$

Non è però possibile estendere questa derivata a tutti i funzionali di quadrato integrabile. Si verifica tuttavia che

Teorema 4.6. *L'operatore $D : \mathcal{S} \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega \times [0,T])$ è chiudibile.*

La dimostrazione di questo risultato segue dal seguente teorema che fornisce una **Formula di integrazione per parti** per le funzioni lisce.

Teorema 4.7. *Siano $F \in \mathcal{S}$ e $h \in L^2(0,T)$. Allora*

$$E[< DF, h >_{L^2(0,T)}] = E[FW(h)].$$

Siano $F, G \in \mathcal{S}$ e $h \in L^2(0,T)$. Allora

$$E[G < DF, h >_{L^2(0,T)}] = E[-F < DG, h >_{L^2(0,T)} + FGW(h)]. \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Si può supporre che $\| h \|= 1$, allora esistono $e_1, \dots, e_n \in L^2(0,T)$, ortonormali tra loro, tali che $h = e_1$ e $F = f(W(e_1), \dots, W(e_n))$. Indicando con $\varphi(x)$ la densità della distribuzione normale standard su $\mathbb{R}^n$ si ha:

$$\begin{aligned} E[< DF, h >] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varphi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)x_1 dx \\ &= E[FW(e_1)] \\ &= E[FW(h)]. \end{aligned}$$

La formula (4.5) segue dalla precedente applicata al prodotto FG.

□

Dimostrazione. (Teorema 4.6) Dobbiamo verificare che, se $(F_n)_{n\geq 0}$ è una successione di variabili aleatorie lisce che converge a 0 in $L^2(\Omega)$ e tale che $(DF_n)_{n\geq 0}$ converge a Z in $L^2(\Omega \times [0,T])$, allora $Z = 0$. Infatti per ogni variabile aleatoria liscia $F \in L^2(\Omega)$, tale che, per ogni $h \in L^2(0,T)$, $FW(h)$ sia limitato, di ha:

$$\begin{aligned} E[< Z, h > F] &= \lim_{n\to\infty} E[< DF_n, h > F] \\ &= \lim_{n\to\infty} E[-F_n < DF, h > + F_n FW(h)] = 0, \end{aligned}$$

perché F_n converge a 0 e $< DF, h >$ e $FW(h)$ sono limitati. Quindi $Z = 0$. □

Indicheremo con $\mathbb{D}^{1,2}$ il dominio di D in $L^2(\Omega)$, cioè $\mathbb{D}^{1,2}$ è la chiusura della classe di variabili aleatorie $\mathcal{S}$ rispetto alla norma:

$$\| F \|_{1,2} = \left[E[F^2] + E[\| DF \|^2_{L^2(0,T)}] \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si verifica che $\mathbb{D}^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$< F, G >_{1,2} = E[FG] + E[< DF, DG >_{L^2(0,T)}].$$

A tutti i funzionali di $\mathbb{D}^{1,2}$ si estende la formula di integrazione per parti, e inoltre si ha facilmente il seguente:

Teorema 4.8. (Regola della catena) *Sia $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ con derivate parziali limitate e sia $F = (F^1, \dots, F^m)$ con $F^i \in \mathbb{D}^{1,2}$. Allora $\varphi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ e*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) DF^i. \tag{4.6}$$

Nel seguito ci sarà utile una forma più generale del teorema precedente. Supponiamo a questo proposito che lo spazio Ω sia lo spazio prodotto

$$\Omega = \Omega^W \times \Omega^P,$$

dove Ω^W indica lo spazio canonico di Wiener e Ω^P quello di Poisson. Poiché sullo spazio Ω è definita una misura prodotto, c'è un'isometria, come spazi di Hilbert, tra $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Omega^W; L^2(\Omega^P))$, dove

$$L^2(\Omega^W; L^2(\Omega^P)) = \left\{ F : \Omega^W \to L^2(\Omega^P) : E^{\mathbb{P}^W} \left[\| F(\cdot) \|^2_{L^2(\Omega^P)} \right] < \infty \right\}.$$

Sullo spazio $L^2(\Omega^W; L^2(\Omega^P))$ si può definire, come prima, l'operatore D derivata nel senso di Malliavin. D è un operatore chiuso da $L^2(\Omega^W; L^2(\Omega^P))$ a $L^2(\Omega^W \times [0,T]; L^2(\Omega^P)) \simeq L^2(\Omega^W \times \Omega^P \times [0,T])$.

Proposizione 4.9. *Sia $\Phi = \varphi(X^W, X^P) \in L^2(\Omega)$, dove X^W dipende solo dal processo di Wiener W e X^P solo dal processo di Poisson P. Supponiamo inoltre che $\varphi(x, y)$ sia una funzione $\mathcal{C}^1$ con derivate limitate nella variabile x e che $X^W \in \mathbb{D}^{1,2}$. Allora $\Phi \in \mathbb{D}^{1,2}$ e si ha:*

$$D\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(X^W, X^P) DX^W. \tag{4.7}$$

Per la dimostrazione di questo risultato e per una formalizzazione più rigorosa del calcolo di Maliavin sullo spazio $\Omega = \Omega^W \times \Omega^P$ si veda [14].

Indichiamo con $\delta : L^2(\Omega \times [0,T]) \to L^2(\Omega)$ l'operatore aggiunto di D, che chiameremo anche **integrale di Skorohod**. In particolare il dominio di δ (Domδ) è costituito dai processi $u \in L^2(\Omega \times [0,T])$ tali che per ogni $F \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\left| E\left[< DF, u >_{L^2(0,T)} \right] \right| \leq c_u \| F \|_2,$$

dove c_u è una costante che dipende da u. Se $u \in$ Domδ, allora $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ è caratterizzato da

$$E[F\delta(u)] = E\left[\int_0^T D_t F u_t dt \right].$$

per ogni $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Ci sono vari modi per rendere rigorosa la costruzione precedente; la teoria originariamente sviluppata da Malliavin sfrutta la decomposizione in caos di Wiener dello spazio $L^2(\Omega)$.

Definizione 4.10. *L'operatore D' sul caos C_n è definito da*

$$D'_t(I_n(f_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n))) = nI_{n-1}(f_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)). \tag{4.8}$$

Data $F \in L^2(\Omega)$, sia $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ la sua decomposizione in caos di Wiener. Diremo che F appartiene al dominio di D' se

$$\sum nn! \| f_n \|^2_{L^2([0,T]^n)} < \infty$$

e si ha $D'_t F = \sum_{n \geq 1} nI_{n-1}(f_n(t_1, \ldots, t_{n-1}, t))$.

È chiaro che D' è un operatore chiuso. Verifichiamo che D' coincide con la derivata di Malliavin D.

Dimostrazione. Per ogni $h \in L^2(0,T)$, $\varepsilon(h) = \sum_{n\geq 0} I_n\left(\frac{h^{\otimes n}}{n!}\right)$. Perciò

$$D'_t\varepsilon(h) = \sum_{n\geq 1} I_{n-1}\left(\frac{h^{\otimes(n-1)}}{(n-1)!}\right)h(t),$$

e quindi $D'_t\varepsilon(h) = \varepsilon(h)h(t) = D_t\varepsilon(h)$. Ma D e D' sono due operatori chiusi che coincidono su un sottoinsieme denso, quindi coincidono. □

Esplicitiamo l'integrale di Skorohod, sfruttando ancora la decomposizione in caos di Wiener. Osserviamo che $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$ si può scrivere:

$$Z_t = \sum_{n\geq 0} I_n(z_n(t_1,\ldots,t_n,t))$$

con $z_n : [0,T]^{n+1} \to \mathbb{R}$ simmetrica nelle prime n variabili e tale che

$$\sum_{n\geq 0} n! \parallel z_n \parallel^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < \infty.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, chiamiamo $\tilde{z}_n$ la simmetrizzata di z_n su $[0,T]^{n+1}$. Se $\sum_{n\geq 0}(n+1)! \parallel \tilde{z}_n \parallel^2_{L^2([0,T]^{n+1})} < \infty$, definiamo

$$\delta'(Z) = \sum_{n\geq 0} I_{n+1}(\tilde{z}_n).$$

Verifichiamo che δ' è l'operatore aggiunto di D, e quindi coincide con l'integrale di Skorohod δ.

Dimostrazione. Ci basta verificare che, date $f, g \in L^2([0,T]^{n+1})$, f simmetrica e g simmetrica nelle prime n variabili, si ha:

$$< D.I_{n+1}(f), I_n(g(\ldots,\cdot)) >_{L^2(\Omega\times[0,T])} = < I_{n+1}(f), \delta' I_{n+1}(g) >_{L^2(\Omega)} . \quad (4.9)$$

E infatti:

$$\begin{aligned} < D.I_{n+1}(f), I_n(g(\ldots,\cdot)) > &= (n+1) < I_n(f(\ldots,\cdot)), I_n(g(\ldots,\cdot)) > \\ &= (n+1)n! \int_{[0,T]^{n+1}} f g dt_1,\ldots,dt_n dt, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} < I_{n+1}(f), \delta' I_{n+1}(g) >_{L^2(\Omega)} &= (n+1)! \int_{[0,T]^{n+1}} f\tilde{g} dt_1,\ldots,dt_n dt \\ &= (n+1)! \int_{[0,T]^{n+1}} f g dt_1,\ldots,dt_n dt \end{aligned}$$

perché f è simmetrica. □

Un altro possibile approccio al calcolo di Malliavin sfrutta il teorema di Girsanov. Questo tipo di presentazione, che permette di ottenere in maniera diversa i risultati appena esposti, è particolarmente utile perché ci permetterà di definire la derivata di Malliavin rispetto ai processi di Poisson.

Definiamo la derivata di Malliavin come nella formula (4.3), da cui si ricava l'espressione (4.4) per tutti i funzionali F lisci e limitati. Chiamiamo

$$L_T^\varepsilon = \exp\left[\varepsilon \int_0^T h(s)dW_s - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T h^2(s)ds\right].$$

Dal teorema di Girsanov sappiamo che la legge di $F(\omega+\varepsilon h^*)$ sotto la probabilità $\mathbb{P}$ coincide con la legge di $F(\omega)$ sotto la probabilità $\mathbb{P}^\varepsilon$ tale che $\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} = L_T^\varepsilon$, quindi

$$E^{\mathbb{P}}[F(\cdot+\varepsilon h^*)] = E^{\mathbb{Q}^\varepsilon}[F(\cdot)] = E^{\mathbb{P}}[F(\cdot)L_T^\varepsilon].$$

Inoltre si verifica che

$$\frac{L_T^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} W(h) \text{ in } L^2(\Omega).$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\left(E[F(\cdot+\varepsilon h^*)] - E[F(\cdot)]\right) - E[FW(h)]\right| < KE\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}(L_T^\varepsilon - 1) - W(h)\right)^2\right],$$

quindi per ogni F limitata e liscia $E[D_hF] = E[FW(h)]$.

Questo risultato si estende poi a tutte le $F \in \mathcal{S}$ e ciò permette di definire la derivata di Malliavin su $\mathbb{D}^{1,2}$ come visto prima.

4.1.3 Proprietà

Lemma 4.11. *Sia $(F_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie che appartengono a $\mathbb{D}^{1,2}$. Supponiamo che F_n converga a F in $L^2(\Omega)$ e che (DF_n) sia limitata in $L^2(\Omega\times[0,T])$. Allora $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.*

Dimostrazione. Dato che $\mathbb{D}^{1,2}$ è uno spazio di Hilbert, dalla successione $(F_n)_{n\geq 0}$ si può estrarre una sottosuccessione F_{n_k} debolmente convergente ad un limite F'. Quindi

$$\begin{aligned} F_{n_k} &\rightarrow F' \text{ in } \mathbb{D}^{1,2} \\ F_{n_k} &\rightarrow F \text{ in } L^2(\Omega), \end{aligned}$$

per l'unicità del limite $F = F'$. □

Presentiamo ora alcuni risultati che permettono il calcolo esplicito di derivate di Malliavin e integrali di Skorokhod.

Proposizione 4.12. *Sia $Z \in L^2(\Omega \times [0,T])$, tale che il processo (Z_t) è $\mathcal{F}_t$-adattato. Allora*

$$\delta(Z) = \int_0^T Z_s dW_s \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Osserviamo che $Z_t = \sum_{n \geq 0} I_n(z_n(t_1, \dots, t_n, t))$ è adattato se e solo se, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n(t_1, \dots, t_n, t) = 0 \tag{4.11}$$

se $t < \max(t_1, \dots, t_n)$. Quindi è sufficiente verificare la (4.10) per le Z_t della forma $I_n(z_n(t_1, \dots, t_n, t))$, in cui z_n soddisfa la (4.11). La funzione simmetrizzata $\tilde{z}_n$ su S_{n+1} è:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_n(t_1, \dots, t_n, t) &= \frac{z_n(t, t_2, \dots, t_n, t_1) + \ldots + z_n(t_1, \dots, t_n, t)}{n+1} \\ &= \frac{z_n(t_1, \dots, t_n, t)}{n+1}. \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned} \delta(Z) &= I_{n+1}(\tilde{z}_n) \\ &= (n+1)! \int_{S_{n+1}} \tilde{z}_n(t_1, \dots, t_n, t) dW_{t_1} \dots dW_{t_n} dW_t \\ &= n! \int_{S_{n+1}} z_n(t_1, \dots, t_n, t) dW_{t_1} \dots dW_{t_n} dW_t \\ &= \int_0^T I_n(z_n(t_1, \dots, t_n, t)) dW_t \\ &= \int_0^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

□

Indicheremo $\delta(Z) = \int_0^T Z_t \delta W_t$.

Proposizione 4.13. (Formula di Clark-Ocone-Karatzas) *Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, grazie al teorema di rappresentazione delle martingale si scrive:*

$$F = E[F] + \int_0^T H_s dW_s.$$

Allora il processo (H_t) è la proiezione ortogonale di $(D_t F)$ sul sottospazio di $L^2(\Omega \times [0,T])$ formato dai processi adattati. In particolare per quasi ogni $t \in [0,T]$:

$$H_t = E[D_t F \big| \mathcal{F}_t].$$

Dimostrazione. Supponiamo che $E[F] = 0$.

Dimostriamo innanzitutto che, se (K_t) è un processo adattato, si ha

$$E\left[\int_0^T (D_s F) K_s ds\right] = E\left[\int_0^T H_s K_s ds\right].$$

Infatti:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T D_s F K_s ds\right] &= \langle DF, K\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\ &= \langle F, \delta(K)\rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= E\left[F\left(\int_0^T K_s dW_s\right)\right] \\ &= E\left[\left(\int_0^T H_s dW_s\right)\left(\int_0^T K_s dW_s\right)\right] \\ &= E\left[\int_0^T H_s K_s ds\right]. \end{aligned}$$

Proviamo che, se $Z \in L^2(\Omega\times[0,T])$ e $\tilde{Z}$ è la sua proiezione ortogonale sullo spazio dei processi adattati, per quasi ogni $t \in [0,T]$ si ha:

$$\tilde{Z}_t = E\left[Z_t|\mathcal{F}_t\right] \quad \text{q.c.}$$

Lo verifichiamo prima per una Z della forma:

$$Z(\omega, t) = M(\omega)\chi_{]u,v]}(t);$$

chiamiamo $M_t := E[M|\mathcal{F}_t]$, allora

$$\tilde{Z}(\omega, t) = M_t(\omega)\chi_{]u,v]}(t).$$

Infatti, se (K_t) è una martingala di quadrato integrabile, si ha:

$$E\left[\int_u^v M K_s ds\right] = \int_u^v E[MK_s]ds = \int_u^v E[M_s K_s]ds.$$

Lo stesso vale per le combinazioni lineari finite

$$Z(\omega, t) = \sum_{i=1}^n M_t^i(\omega)\chi_{]u_i,v_i]}(t). \tag{4.12}$$

Sia ora $(Z_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie della forma (4.12) che converge a Z in $L^2(\Omega\times[0,T])$, e indichiamo con $\tilde{Z}_n$ e $\tilde{Z}$ le loro proiezioni sullo spazio dei processi adattati. Allora $\int_0^T E[(\tilde{Z}_t^n - \tilde{Z}_t)^2]dt \to 0$, cioè, per quasi ogni t, $(\tilde{Z}_t^n - \tilde{Z}_t) \to 0$ in $L^2(\Omega)$. Ma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_t^n & = & E[Z_t^n|\mathcal{F}_t] \\ \text{in } L^2 \downarrow & & \downarrow \text{in } L^2 \\ \tilde{Z}_t & & E[Z_t|\mathcal{F}_t] \end{array}$$

e questo permette di concludere. □

Proposizione 4.14. *Sia F liscia e $Z \in \mathrm{Dom}\delta$. Allora:*

$$\int_0^T FZ_t\delta W_t = F\int_0^T Z_t\delta W_t - \int_0^T D_tFZ_tdt.$$

Dimostrazione. Sia G liscia, allora, sfruttando la formula di interazione per parti e la definizione dell'integrale di Skorokhod come operatore aggiunto di D, otteniamo:

$$\begin{aligned}
\langle G, \delta(FZ.)\rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle DG, FZ.\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\
&= \langle FDG, Z\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\
&= \langle D(FG) - GDF, Z\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\
&= \langle FG, \delta(Z)\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} - \langle DF.\rangle_{L^2(\Omega\times[0,T])} \\
&= E\left[G\left(F\int_0^T Z_s\delta W_s - \int_0^T D_sFZ_sds\right)\right].
\end{aligned}$$

□

La proposizione precedente si estende a tutte le $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ tali che:

$$E\left[F^2\left(\int_0^T Z_s\delta W_s\right)^2 + \left(\int_0^T D_sFH_sds\right)^2\right] < \infty.$$

Proposizione 4.15. *Sia $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ un funzionale $\mathcal{F}_t$-misurabile. Allora*

(a) D_sF è $\mathcal{F}_t$-misurabile;

(b) $D_sF = 0$ per $s > t$.

Dimostrazione. Se F è $\mathcal{F}_t$ misurabile e $\sum_{n\geq 0} I_n(f_n)$ è la sua decomposizione in caos di Wiener, allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(t_1, \ldots, t_{n-1}, s) = 0$ se $s > t$. I risultati *(a)* e *(b)* seguono dunque dalla formula (4.8). □

Proposizione 4.16. *Supponiamo che $Z_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t \in [0,T]$ e che esista una versione misurabile di $D_sZ_t(\omega) \in L^2(\Omega)\times[0,T]\times[0,T]$; se inoltre $\int_0^T \parallel Z_t \parallel^2_{\mathbb{D}^{1,2}} dt < \infty$, allora:*

$$D_t\left(\int_0^T Z_sds\right) = \int_0^T D_tZ_sds. \tag{4.13}$$

Inoltre $Z \in \mathrm{Dom}\delta$ e

$$D_t\left(\int_0^T Z_s\delta W_s\right) = Z_t + \int_0^T (D_tZ_s)\delta W_s. \tag{4.14}$$

Dimostrazione. Verifichiamo le formule (4.13) e (4.14) per $Z_t = \varepsilon(h)k(t)$, dove $h, k \in L^2(0,T)$ e $\varepsilon(h)$ è l'esponenziale di Wiener.

$$\begin{aligned} D_t\left(\int_0^T Z_s ds\right) h &= D_t\left(\varepsilon(h)\right)\int_0^T k(s)ds = \varepsilon(h)h(t)\int_0^T k(s)ds \\ &= \int_0^T \varepsilon(h)h(t)k(s)ds = \int_0^T D_t Z_s ds, \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int_0^T Z_s \delta W_s &= \varepsilon(h)W(k) - \varepsilon(h)\langle h,k\rangle_{L^2(0,T)}, \\ D_t\left(\int_0^T Z_s\delta W_s\right) &= \varepsilon(h)h(t)W(k) + \varepsilon(h)k(t) - \varepsilon(h)h(t)\langle h,k\rangle_{L^2(0,T)}. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} D_t Z_s &= \varepsilon(h)h(t)k(s), \\ \int_0^T (D_t Z_s)\delta W_s &= \varepsilon(h)h(t)W(k) - h(t)\int_0^T \varepsilon(h)h(s)k(s)ds \\ &= \varepsilon(h)h(t)W(k) - \varepsilon(h)h(t)\langle h,k\rangle_{L^2(0,T)}; \end{aligned}$$

ciò verifica la (4.14) per $Z_t = \varepsilon(h)k(t)$. Questi risultati si estendono a $L^2(\Omega \times [0,T])$ sfruttando la densità della famiglia di funzioni della forma

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon(h_i)(\omega)k_i(t)$$

e la linearità della derivata di Malliavin e dell'integrale di Skorokhod. □

4.1.4 Differenziabilità nel senso di Malliavin delle equazioni differenziali stocastiche

Dimostriamo che la soluzione di (2.2) è differenziabile nel senso di Malliavin.

Procediamo come nella dimostrazione dell'esistenza e unicità delle soluzioni di (2.2), verificando per prima cosa la differenziabilità delle soluzioni dell'equazione differenziale (2.4), che non comprende i salti.

Proposizione 4.17. *Sia $Z = (Z_t)_{0\le t\le T}$ una soluzione di (2.4), in cui r e σ sono $\mathcal{C}^1$ con derivate limitate. Allora $Z_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t \in [0,T]$ e*

$$D_s Z_t = \left(\sigma(s,Z_s) + \int_s^t \frac{\partial r}{\partial Z}(u,Z_u)D_s Z_u du + \int_s^t \frac{\partial \sigma}{\partial Z}(u,Z_u)D_s Z_u du\right)\chi_{\{s<t\}}. \tag{4.15}$$

Dimostrazione. Definiamo la successione di processi $(Z^n)_{n\geq 0}$:

$$Z_t^0 = x_0$$
$$Z_t^{n+1} = Z_0 + \int_0^t r(s, Z_s^n)ds + \int_0^t \sigma(s, Z_s^n)dW_s \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Vogliamo verficare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $t \in [0,T]$, $Z_t^n \in \mathbb{D}^{1,2}$ e che:

$$\varphi_n(t) := \sup_{0\leq s\leq t} E\left[\sup_{s\leq u\leq t} |D_s Z_u^n|^2\right] < \infty;$$

inoltre proviamo che esistono $C_1, C_2 > 0$ tali che

$$\varphi_{n+1}(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \varphi_n(s)ds \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lo proviamo per induzione su n.

Il caso $n = 0$ è ovvio.

Supponiamo che sia vero per n e mostriamo che vale anche per $n+1$. Le variabili aleatorie $r(s, Z_s^n)$ e $\sigma(s, Z_s^n)$ sono derivabili secondo Malliavin grazie alla regola della catena (4.6). Quindi per la proposizione 4.16 anche $\int_0^t r(u, Z_u^n)du$ e $\int_0^t \sigma(u, Z_u^n)dW_u$ lo sono. Inoltre possiamo calcolare esplicitamente le loro derivate:

$$D_s\left(\int_0^t r(u, Z_u^n)du\right) = \left(\int_s^t D_s(r(u, Z_u^n))du\right)\chi_{\{s\leq t\}},$$

e

$$D_s\left(\int_0^t \sigma(u, Z_u^n)dW_u\right) = \left(\sigma(s, Z_s^n) + \int_s^t D_s(\sigma(u, Z_u^n))dW_u\right)\chi_{\{s\leq t\}}.$$

Quindi per linearità anche $Z_t^{n+1} \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t \in [0,T]$ e, se $|r'| < K$ e $|\sigma'| < K$, si ha

$$E\left[\sup_{s\leq u\leq t} |D_s Z_u^{n+1}|^2\right] \leq c\left(\gamma + TK^2 \int_s^t E[|D_s Z_u^n|^2]du\right), \tag{4.16}$$

dove $\gamma = \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\sigma(t, Z_t^n)|^2\right] < \infty$.

Dal teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per equazioni differenziali stocastiche segue che Z^n converge a Z in $L^2(\Omega)$; inoltre, applicando il lemma di Gromwall alla (4.16), ricaviamo che le derivate $(D.Z^n)_n$ sono uniformemente limitate in n. Grazie al lemma 4.11 possiamo concludere che $Z_t \in \mathbb{D}^{1,2}$.

L'espressione esplcita di $D_s Z_t$ si ottiene derivando secondo Malliavin l'equazione

$$Z_t = x_0 + \int_0^t r(s, Z_s)ds + \int_0^t \sigma(s, Z_s)dW_s$$

e applicando la regola della catena. Ciò dimostra la formula (4.15). □

La derivabilità secondo Malliavin delle soluzioni di (2.2) segue dal risultato precedente.

Corollario 4.18. *Sia $X = (X_t)_{0 \le t \le T}$ una soluzione di (2.2), in cui r e σ sono $\mathcal{C}^1$ con derivate limitate. Allora $X_t \in \mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t \in [0, T]$.*

Dimostrazione. Nella dimostrazione del teorema 2.5 abbiamo costruito esplicitamente la soluzione di (2.4):

$$X_t = Z_t \prod_{j \le P_t} (1 + U_j),$$

dove Z è la soluzione dell'equazione (2.4). La tesi si ottiene dunque dalla proposizione precedente, applicando la regola della catena (4.7). $\square$

4.2 Caso Poisson

4.2.1 Decomposizione in caos di Poisson

Supponiamo ora che lo spazio $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ sia uno spazio di Poisson, su cui è definito un processo di Poisson $(P_t)_{t \ge 0}$ di parametro λ e chiamiamo $(N_t)_{t \ge 0}$ il processo compensato ($N_t = P_t - \lambda t$). Introduciamo, analogamente a quanto fatto nel caso Wiener, lo sviluppo in caos di Poisson. Quindi, ricalcando la stessa costruzione del paragrafo precedente, definiamo:

$$\tilde{J}_n(f) = \int_0^T dN_{t_n} \int_0^{t_n} dN_{t_{n-1}} \dots \int_0^{t_2} f(t_1, \dots, t_n) dN_{t_1}.$$

Come prima si ottiene che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ e per $f \in L^2(S_n)$ e $g \in L^2(S_m)$, si ha:

$$E\left[\tilde{J}_n(f)\tilde{J}_m(g)\right] = \begin{cases} < f, g >_{L^2(S_n)} & se\ n = m \\ 0\ se\ n \ne m. \end{cases}$$

Osservazione 4.19. *Nel caso Wiener uno strumento fondamentale di dimostrazione era dato dagli esponenziali di Wiener $\varepsilon(h)$. Osserviamo che $\varepsilon(h)$ è al tempo stesso la soluzione in T dell'equazione differenziale stocastica*

$$\begin{cases} dX_t = h(t) X_t dW_t \\ X_0 = 1 \end{cases}$$

e l'esponenziale $e^{W(h)}$ normalizzato, in modo che $E[\varepsilon(h)^2] = e^{\|h\|^2}$. Nel caso di un processo di Poisson queste due definizioni non coincidono; in particolare, scegliendo come definizione degli esponenziali di Poisson $e^{N(h)}$ normalizzato (o equivalentemente $e^{\int_0^T h(s)dP_s}$ normalizzato), si ottiene:

$$\gamma(h) = \exp\left[\int_0^T h(s) dP_s - \int_0^T \left(e^{h(s)} - 1\right) ds\right],$$

che è la soluzione dell'equazione

$$\begin{cases} dX_t = \left(e^{h(t)} - 1\right) X_t dN_t \\ X_0 = 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$E[\gamma(h)^2] = \exp\left(\int_0^T \left(e^{h(s)} - 1\right)^2 ds\right),$$

quindi $\gamma(h) \in L^2(\Omega')$ *se* $\int_0^T e^{2h(s)}ds < \infty$. *Si verifica che* Γ, *l'insieme degli esponenziali di Poisson, è denso in* $L^2(\Omega')$.

Possiamo scomporre lo spazio $L^2(\Omega')$ nella somma diretta delle immagini di $L^2(S_n)$ attraverso $\tilde{J}_n$:

$$L^2(\Omega') = \bigoplus_{n\geq 0} \tilde{C}_n. \tag{4.17}$$

infatti la proiezione di $\gamma(h)$ su $\tilde{C}_n$ è $\tilde{J}_n\left(e^{h(\cdot)} - 1\right)^{\otimes n}$ e

$$E\left[\gamma(h)^2\right] = \sum_{n\geq 0} \| \, (e^{h(\cdot)} - 1)^{\otimes n} \, \|^2_{L^2(S_n)} \, .$$

Grazie alla densità degli esponenziali di Poisson in $L^2(\Omega')$, si ottiene la (4.17).

Analogamente al caso Wiener si può definire la derivata di Malliavin $\tilde{D}$, e si verifica che

$$\tilde{D}_t\gamma(h) = \gamma(h)\left(e^{h(t)} - 1\right).$$

Scegliendo $F = \gamma(h)$ e $G = \gamma(k)$ otteniamo:

$$\tilde{D}_t(FG) = F\tilde{D}_tG + G\tilde{D}_tF + \tilde{D}_tF\tilde{D}_tG,$$

e quindi questa definizione della derivata di Malliavin non permette di soddisfare la regola della catena. Abbiamo dunque bisogno di un altro approccio, che ci permetta di definire una derivata che possieda proprietà maneggevoli nei calcoli.

4.2.2 Altro approccio: attraverso il teorema di Girsanov

Indichiamo con $\mathcal{S}^P$ l'insieme dei funzionali lisci, che in questo caso sono le variabili aleatorie $F : \Omega' \to \mathbb{R}$ della forma:

$$F = f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

in cui $f \in \mathcal{C}_p^\infty$ e $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sono gli istanti di salto del processo di Poisson (P_t).

Definiamo la derivata di Malliavin per una funzione liscia come il processo $(D_t^P F)_{t\in[0,T]}$ dato da

$$D_t^P F = D_t^P f(\tau_1, \dots, \tau_n) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tau_1, \dots, \tau_n)\chi_{]0,\tau_i]}(t);$$

più in generale per ogni elemento h dello spazio di Cameron-Martin (che sullo spazio di Poisson ha la stessa definizione che sullo spazio di Wiener) poniamo

$$D_h F = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tau_1, \dots, \tau_n) h_{\tau_i}.$$

Vale la formula di integrazione per parti:

$$E[D_h^P F] = E\left[F \int_0^T h(s) dPs\right]. \tag{4.18}$$

Dimostrazione. Dimostreremo la formula di integrazione per parti (4.18) nel caso in cui F dipenda solo dall'istante del primo salto τ_1, cioè $F = f(\tau_1)$. Il caso generale si verifica analogamente.

Supponiamo che h sia uniformemente limitata e consideriamo la probabilità $\mathbb{Q}^\varepsilon$ tale che:

$$\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} = \eta_T^\varepsilon = e^{-\varepsilon \int_0^T \lambda h(s) ds} \prod_{s\leq T} \lambda \left(1 + \varepsilon h(s) \Delta P_s\right).$$

Supponiamo inoltre che ε sia tale che, per ogni $s \in [0, T]$, $\varepsilon h(s) > -1$. Allora, per il teorema di Girsanov-Meyer, sappiamo che sotto la probabilità $\mathbb{Q}^\varepsilon$ il processo $(P_t - \lambda \int_0^t (1+\varepsilon h(s)) ds)_{t\in[0,T]}$ è una martingala, cioè, per ogni $0 \leq s < t \leq T$, $P_t - P_s$ è una variabile aleatoria di Poisson di parametro $\int_s^t \lambda(1 + \varepsilon h(r) dr)$. Consideriamo la funzione crescente

$$\alpha_\varepsilon(t) = \int_0^t \lambda(1 + \varepsilon h(r)) dr = \lambda \left(t + \varepsilon \int_0^t h(r) dr\right).$$

Sempre per il teorema di Girsanov-Meyer, la legge di $P_{\alpha_\varepsilon(\cdot)}$ sotto $\mathbb{P}$ è uguale alla legge di $P.$ sotto $\mathbb{Q}^\varepsilon$, cioè:

$$E\left[F(P_{\alpha_\varepsilon(\cdot)})\right] = E\left[F(P.)\eta_T^\varepsilon\right].$$

Quindi:

$$E\left[\frac{F(P_{\alpha_\varepsilon(\cdot)}) - F(P.)}{\varepsilon}\right] = E\left[F(P.)\frac{\eta_T^\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right].$$

Dato che

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_T^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \int_0^T h(s) dN_s$$

e che, per la limitatezza di h, possiamo "portare il limite dentro la speranza", si ha:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\frac{F(P_{\alpha_\varepsilon(\cdot)}) - F(P_\cdot)}{\varepsilon}\right] = E\left[F(P_\cdot)\int_0^T h(s)dN_s\right].$$

Esplicitiamo il primo termine dell'equazione precedente:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\frac{F(P_{\alpha_\varepsilon(\cdot)}) - F(P_\cdot)}{\varepsilon}\right] = E\left[\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{f(\alpha_\varepsilon^{-1}(\tau_1)) - f(\tau_1)}{\varepsilon}\right];$$

Infine

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{f(\alpha_\varepsilon^{-1}(\tau_1)) - f(\tau_1)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{f(\alpha_\varepsilon^{-1}(\tau_1)) - f(\tau_1)}{\alpha_\varepsilon^{-1}(\tau_1) - \tau_1} \cdot \frac{\alpha_\varepsilon^{-1}(\tau_1) - \tau_1}{\varepsilon} \\ &= -f'(\tau_1)\int_0^{\tau_1} h(s)ds. \end{aligned}$$

Risulta così dimostrata la (4.18), se h è uniformemente limitata. Il risultato si estende poi per densità a tutto lo spazio di Cameron-Martin. □

Proposizione 4.20. *(a) L'operatore D^P è chiudibile e ammette un aggiunto δ^P tale che*

$$E[D_u^P F] = E[F\delta^P(u)],$$

per F semplice (liscia) e $u \in \{\sum_{k=1}^d G_k h_k : G_k semplice, h_k \in CM\}$;

(b) se $F \in \mathrm{Dom}D^P$ e $u \in \mathrm{Dom}\delta^P$, tali che $uF \in \mathrm{Dom}\delta^P$, allora

$$\delta^P(uF) = F\int_0^T u_t^* dN_t - D_u^P F; \tag{4.19}$$

(c) δ^P coincide con l'integrale rispetto al processo di Poisson compensato sui processi adattati

$$\delta^P(u) = \int_0^T u_t^* dN_t.$$

Dimostrazione. Si veda [5] o [18]. □

È importante notare che con questa definizione il dominio di D_h^P, per ogni $h \in \mathrm{CM}$, non contiene il valore P_T del processo di Poisson all'istante T. Quindi non sono derivabili le funzioni della forma $\varphi(P_T)$, mentre appartengono al dominio di D_h^P le funzioni che dipendono da tutta la traiettoria di $(P_t)_{t\in[0,T[}$ escludendo l'istante finale.

Se $X : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ appartiene al dominio di D^P, esplicitiamo le regole di derivazione per $\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dt$ e $\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dP_t$.

Proposizione 4.21. *Se, per ogni $t \in [0,T]$ e $n \in \mathbb{N}$, $X(\cdot,t,n) \in \mathrm{Dom}D^P$ e $h \in CM$, allora:*

$$\begin{aligned} D_h^P\left(\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dt\right) &= \int_0^T h_t(X(\cdot,t,P_t) - X(\cdot,t,P_t-1))dP_t \\ &\quad + \int_0^T [D_h^P X](\cdot,t,P_t)dt; \end{aligned}$$

se inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X(\cdot,\cdot,n) \in \mathcal{C}_c^1(0,T)$, allora

$$D_h^P\left(\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dP_t\right) = -\int_0^T h_t \frac{\partial}{\partial t} X(\cdot,t,P_t)dP_t + \int_0^T [D_h^P X(\cdot,t,P_t)]dP_t. \tag{4.20}$$

Dimostrazione. Iniziamo verificando la prima equazione:

$$\begin{aligned} D_h^P &\left(\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dt\right) = D_h^P \sum_{k\geq 0} \int_{\tau_k\wedge T}^{\tau_{k+1}\wedge T} X(\cdot,t,k) \\ = &\quad - \sum_{k\geq 0} h_{\tau_k}\chi_{[0,T]}(X(\tau_k,k-1) - X(\tau_k,k)) \\ &\quad + \sum_{k\geq 0} \int_{\tau_k\wedge T}^{\tau_{k+1}\wedge T} [D_h^P X](\cdot,t,k)dt \\ = &\quad \int_0^T h_t(X(\cdot,t,P_t) - X(\cdot,t,P_t-1))dP_t + \int_0^T [D_h^P X](\cdot,t,P_t)dt. \end{aligned}$$

Verifichiamo ora la (4.20):

$$\begin{aligned} D_h\left(\int_0^T X(\cdot,t,P_t)dP_t\right) &= D_h\left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[0,T]}(\tau_k)X(\cdot,t,P_t)\right) \\ &= D_h^P \sum_{k=0}^{\infty} X(\cdot,\tau_k,k) \\ &= \lim_{n\to\infty} D_h^P\left(\sum_{k=1}^{n} X(\cdot,t,P_t)\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} h_{\tau_k}\frac{\partial}{\partial t}X(\cdot,\tau_k,k) + \sum_{k=1}^{\infty}[D_h^P X](\cdot,\tau_k,k) \\ &= -\int_0^T h_t\frac{\partial}{\partial t}X(\cdot,t,P_t) + [D_h^P X(\cdot,t,P_t)]dP_t. \end{aligned}$$

□

4.3 Calcolo di Malliavin in dimensione finita per funzionali semplici

Dopo la presentazione del calcolo di Malliavin per processi di Wiener e processi di Poisson, vorremmo estendere gli stessi ragionamenti ad una più vasta classe di processi, in modo da ottenere, analogamente a quanto abbiamo fatto nei paragrafi precedenti, una formula di integrazione per parti valida anche in casi più generali. La formula di integrazione per parti, infatti, è lo strumento principale di cui faremo uso per ridurre il calcolo delle greche a quello di una speranza del tipo:

$$E\left[\varphi(X_T)\pi\right].$$

Allargando la classe di processi, dobbiamo però limitarci a presentarlo in dimensione finita, per quanto questo possa sembrare strano; notoriamente, infatti, con l'espressione Calcolo di Malliavin si designa un calcolo differenziale in dimensione infinita, ma ora non possiamo più aspettarci che la definizione nel caso finito passi al limite, come succedeva per i processi di Wiener e di Poisson.

Questa versione minore del calcolo di Malliavin è comunque utile: in molti casi, infatti, riusciamo a suddividere lo spazio Ω in sottoinsiemi misurabili su cui, di volta in volta, intervengono solo un numero finito di variabili aleatorie. Alcuni esempi sono presentati nel capitolo 5.

Su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sia $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, tali che H_n abbia momenti finiti di ogni ordine. Inoltre richiediamo che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ la legge di H_n abbia densità p_n rispetto alla misura di Lebesgue, che p_n sia $\mathcal{C}^1$ con $lim_{x\to\pm\infty}|x|p_n(x) = 0$ e che

$$\theta_n = \left(\frac{\partial \ln p_n(x)}{\partial x}\right)\chi_{\{p_n(x)>0\}}$$

abbia al più crescita polinomiale.

Indichiamo con $\mathcal{C}_p^k$ lo spazio dei funzionali k volte differenziabili e tali che le derivate fino all'ordine k abbiano al più crescita polinomiale, possiamo allora definire:

$$S_{(m,k)} = \{F = f(H_1, \dots, H_n)\big| f \in \mathcal{C}_p^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\} \subseteq L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

il sottospazio dei **funzionali semplici** e

$$\begin{aligned} P_{(m,k)} &= \{U = (U_1, \dots, U_m)\big| U_i = u_i(H) \in S_{(m,k)}, i \in \{1, \dots m\}\} \\ &\subseteq L^2(\Omega \times \{1, \dots, m\}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{T}, \mathbb{P} \otimes \mu) \end{aligned}$$

quello dei **processi semplici** di lunghezza m, in cui abbiamo indicato con $\mathcal{T}$ la tribù di tutti i sottoinsiemi di $\{1, \dots, m\}$ e con μ la misura che conta i punti.

Analogamente a prima possiamo definire per ogni $F \in S_{(m,1)}$ la **derivata di Malliavin**

$$DF = (D_1 F, \dots D_m F) \in P_{(m,0)}, \text{con } D_i F = \partial_i f(H_1, \dots, H_m)$$

e ricavare la definizione dell'**integrale di Skhorokod** richiedendo che δ sia l'operatore aggiunto di D.

Se $F = f(H) \in S_{(m,k)}$ e $U = (U_1, \dots U_m) \in P_{(m,k)}$ si ha:

$$\begin{aligned}
E\left[\sum_{i=1}^{m} D_i F U_i\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(H) u_i(H)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int \frac{\partial f}{\partial x_i}(y) u_i(y) p_H(y) dy \\
&= -\sum_{i=1}^{m} \int f(y) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(y) p_H(y) + u_i(y) \frac{\partial p_H}{\partial x_i}(y)\right) dy \\
&= -E\left[F\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(H) + u_i(H)\theta_i(H)\right)\right] \\
&= E\left[F\delta(U)\right].
\end{aligned}$$

Ne ricaviamo l'espressione esplicita di δ:

$$\delta(U) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(H) + u_i(H)\theta_i(H).$$

Definiamo infine l'**operatore di Ornstein Uhlenbeck** $L = \delta \circ D : S_{(m,2)} \to S_{(m,0)}$:

$$L(F) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(H_1, \dots, H_m) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(H_1, \dots, H_m)\theta_i(H_1, \dots, H_m).$$

Le classiche regole del calcolo differenziale ci permettono di ottenere la regola della catena e altre importanti conseguenze.

Proposizione 4.22. *Sia $\varphi \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d)$ e sia $F = (F^1, \dots, F^d)$ con $F^i \in S_{(m,1)}$. Allora $\varphi(F) \in S_{(m,1)}$ e*

$$D_i \varphi(F) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} D_i F^j. \tag{4.21}$$

Se invece $\varphi \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^d)$ e $F, G \in S_{(m,2)}$ allora:

$$L\varphi(F) = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(F) < DF^i, DF^j > + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(F) L F^j,$$

da cui, scegliendo $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$, *otteniamo:*

$$L(FG) = FLG + GLF - 2 < DF, DG >_{\mathbb{R}^m} . \tag{4.22}$$

Data $F = (F^1, \ldots, F^d)$ tale che $F^i \in S_{(m,1)}$ chiamiamo **matrice di covarianza**

$$\begin{aligned} \sigma_F &= (\sigma_F^{i,j})_{\{i,j=1,\ldots,m\}} \\ &= \left(< DF^i, DF^j >\right)_{\{i,j=1,\ldots,m\}} \\ &= \left(\sum_{r=1}^{m} (\partial_p f^i \partial_p f^j)(H_1, \ldots, H_m)\right)_{\{i,j=1,\ldots,m\}} . \end{aligned}$$

Arriviamo infine alla **formula di integrazione per parti**.

Teorema 4.23. *Siano* $F = (F^1, \ldots, F^d) \in S_{(m,2)}$ *e* $G \in S_{(m,1)}$. *Supponiamo che la matrice* σ_F *sia invertibile (indichiamo la sua inversa con* $\gamma_F = \sigma_F^{-1}$*) e che*

$$E\left[(det\gamma_F)^4\right] < \infty. \tag{4.23}$$

Allora, per ogni $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, *si ha:*

$$E\left[\partial_i \varphi(F) G\right] = E\left[\varphi(F) I^i(F, G)\right] \;\; \forall i = 1, \ldots, m. \tag{4.24}$$

$I^i(F, G) \in L^1$ *e*

$$I^i(F, G) = \sum_{j=1}^{d} G\gamma_f^{ji} LF^j - \gamma_F^{ji} < DF^j, DG > -G < DF^j, D\gamma_F^{ji} > .$$

Dimostrazione. Dalla regola della catena (4.21) otteniamo, per ogni $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} < D\varphi(F), DF^j > &= \sum_{r=1}^{m} < D_r \varphi(F), DF^j > \\ &= \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{d} \partial_i \varphi(F) < D_r F^i, D_r F^j > \\ &= \sum_{i=1}^{d} \partial \varphi_i(F) \sigma_F^{i,j}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(F) = \sum_{j=1}^{d} < D\varphi(F), DF^j > \gamma_F^{j,i}.$$

Possiamo esplicitare i termini che compaiono nella precedente somma utilizzando la (4.22), otteniamo:

$$< D\varphi(F), DF^j >= \frac{1}{2}\left(-L\varphi(F)F^j + \varphi(F)LF^j + F^j L(\varphi(F))\right).$$

che assieme alla relazione di dualità ci permette di concludere. Infatti per ogni $i = 1, \ldots, m$ si ha:

$$\begin{aligned}
E[\partial_i \varphi(F)G] &= \frac{1}{2}E\left[G\left(\sum_{j=1}^{d} -L\varphi(F)F^j + \varphi(F)LF^j + F^j L(\varphi(F))\right)\gamma_F^{ji}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{d}\frac{1}{2}E\Big[\varphi(F)\Big(-F^j L(\gamma_F^{ji}G) + G\gamma_F^{ji}LF^j + L(GF^j\gamma_F^{ji})\Big)\Big] \\
&= \sum_{j=1}^{d} E\Big[\varphi(F)\Big(G\gamma_F^{ji}LF^j - < DF^j, D(G\gamma_F^{ji}) >\Big)\Big] \\
&= E\big[\varphi(F)I^i(F,G)\big].
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'ultimo passaggio è lecito perché l'ipotesi (4.23) garantisce che $E\left[\varphi(F)\left(G\gamma_F^{ji}LF^j - < DF^j, D(G\gamma_F^{ji}) >\right)\right] < \infty$ per ogni $j = 1, \ldots, d$. $\square$

Capitolo 5

Calcolo delle "greche"

5.1 Motivazioni finanziarie

Descriviamo brevemente il modello di Black e Scholes, uno dei più semplici modelli di mercato finaziario, che ci permette di introdurre alcuni termini e alcuni concetti dell'ambito finanziario che ci saranno utili in seguito.

Il modello di Black e Scholes è costituito da due attivi:

1) un attivo "senza rischio" $B = (B_t)$, la cui evoluzione è descritta dall'equazione differenziale:

$$dB_t = r' B_t dt;$$

2) un attivo "con rischio" $X = (X_t)$, la cui evoluzione è regolata dall'equazione differenziale:

$$dX_t = X_t(rdt + \sigma dW_t).$$

Si verifica facilmente che il processo X ha traiettorie continue e incrementi indipendenti e stazionari.

Chiameremo **prezzo attualizzato** dell'attivo X il processo $\tilde{X}$ tale che:

$$\tilde{X}_t = e^{-r' t} X_t$$

e supporremo che nel nostro modello di mercato siano impossibili gli arbitraggi. In termini informali, una strategia di **arbitraggio** rappresenta la possibilità di ottenere guadagni senza rischi e senza un effettivo investimento di capitale. L'ipotesi di assenza di arbitraggi è dunque lecita e necessaria per l'efficienza del mercato. Con il teorema di Girsanov si dimostra facilmente che esiste un'unica probabilità $\tilde{\mathbb{P}}$, detta **probablità martingala equivalente**, sotto la quale il prezzo attualizzato dell'attivo $\tilde{X}$ è una martingala.

Un **prodotto derivato** è un prodotto finanziario il cui valore è basato sul valore di mercato di altri beni. Nel nostro modello semplificato di mercato, in cui è presente un solo attivo con rischio (che sarà anche detto **sottostante**), tale valore si esprime con una funzione di X, il prezzo dell'attivo. Nel seguito ci occuperemo di prodotti derivati piuttosto semplici:

- le **opzioni europee**, che possono essere esercitate solo alla scadenza. Tra queste in particolare tratteremo le **call**, le **put** e le **opzioni digitali**. Un'opzione **call** europea dà il diritto di comprare una certa quantità di attivo finanziario ad una data T fissata ad un prezzo di eserecizio K, anch'esso fissato. Matematicamente un'opzione europea sarà definita da una variabile aleatoria $\mathcal{F}_T$-misurabile e positiva della forma $\varphi(X_T) = (X_T - K)^+$, la funzione φ è detta **payoff**. Un'opzione **put** dà invece il diritto di vendere una certa quantità di attivo finanziario al tempo T e al prezzo K e sarà rappresentata da $\varphi(X_T) = (K - X_T)^+$. Un'opzione digitale infine è un'opzione che assume solo due possibili valori alla scadenza, il suo payoff è una funzione del tipo: $\varphi(X_T) = \chi_{\{X_T > K\}}$.

- le **opzioni asiatiche**, il cui valore alla scadenza dipende dalla media del prezzo del sottostante in un pre-determinato intervallo di tempo $[0, T]$, cioè è dato da:
$$\varphi\left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt\right).$$

Uno dei primi problemi da affrontare quando ci si occupa di prodotti derivati consiste nel determinare un prezzo “equo” per il prodotto stesso.

In un mercato **completo** il prezzo di ogni prodotto derivato è unicamente determinato dalla richiesta di assenza di arbitraggio. Nel modello di Black e Scholes tale prezzo è dato da

$$e^{-r'T} E^{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\varphi(X_T)\right],$$

dove $\tilde{\mathbb{P}}$ è la probabilità martingala equivalente. Si verifica infatti che è equivalente richiedere la completezza di un modello o l'esistenza di un'unica probabilità martingala. In un mercato **incompleto**, invece, l'assenza di arbitraggio non è sufficiente a determinare un unico prezzo per il derivato; in questo caso, infatti, esitono infinite probabilità martingala equivalenti, ciascuna delle quali fornisce un prezzo che è compatibile con la richiesta di assenza di arbitraggio. Nei prossimi paragrafi ci occuperemo di un modello di mercato incompleto: il modello di Merton.

Introduciamo infine le **greche**: sono quantità che misurano la sensibilità del modello alle variazioni dei parametri e sono calcolate come derivate del prezzo del prodotto derivato. Tra le più importanti ricordiamo

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\partial E[\varphi(\tilde{X}_T)]}{\partial r}, \\ \mathcal{V} &= \frac{\partial E[\varphi(\tilde{X}_T)]}{\partial \sigma}, \\ \Delta &= \frac{\partial E[\varphi(\tilde{X}_T)]}{\partial X_0}, \\ \Gamma &= \frac{\partial^2 E[\varphi(\tilde{X}_T)]}{\partial^2 X_0}.\end{aligned}$$

Per una presentazione più completa del modello di Black e Scholes si veda ad esempio [4]. Per una formalizzazione matematicamente rigorosa dei risultati citati in questo paragrafo si veda [13].

5.2 Modello di Merton

Ci occupiamo ora di un modello in cui il prezzo dell'attivo "con rischio" sia definito dall'equazione:

$$\begin{cases} dX_t = X_{t-}\left[r(t)dt + \sigma(t)dW_t + d\left(\sum_{j\leq P_t} U_j - t\lambda E[U_j]\right)\right] \\ X_0 = x, \end{cases} \tag{5.1}$$

dove W_t è un processo di Wiener, P_t un processo di Poisson (indichiamo con $\tau_1, \tau_2, \ldots$ i suoi istanti di salto) e $(U_j)_{j\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti equidistribuite a valori in $]-1, +\infty[$. Supporremo inoltre che le tribù generate rispettivamente da $(W_t)_{t\geq 0}$, $(P_t)_{t\geq 0}$ e $(U_j)_{j\geq 1}$ siano indipendenti. Il prezzo (5.1) presenta dei salti di valori relativi $U_1, U_2, \ldots$ agli istanti $\tau_1, \tau_2, \ldots$ e tra due istanti di salto segue il modello di Black e Scholes. L'aggiunta dei salti, che modellizzano brusche variazioni del prezzo degli attivi, rende il modello di Merton un modello di mercato incompleto: esistono dunque infinite probabilità equivalenti a $\mathbb{P}$ su $\mathcal{F}_T$, sotto le quali il prezzo attualizzato $(e^{-r't}X_t)_{0\leq t\leq T}$ è una martingala.

La formula (5.1) può essere riscritta come

$$\begin{cases} dX_t = X_{t-}\left[r(t)dt + \sigma(t)dW_t + \int\int_{[0,t]\times\mathbb{R}} x(\mu-\nu)(ds,dx)\right] \\ X_0 = x, \end{cases}$$

in cui $\mu(ds, dx) = \sum_{j\leq P_t} \delta_{(\tau_j, U_j)}(ds, dx)$ è la misura aleatoria associata al processo di Poisson composto $\sum_{n\leq P_t} U_n$ e $\nu(ds, dx) = \lambda ds F(dx)$ è il suo compensatore prevedibile. Esplicitamente si ha:

$$X_t = x \exp\left[\int_0^t \left(r(s) - \lambda E[U_j] - \frac{\sigma(s)^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s\right] \prod_{j\leq P_t} (U_j + 1). \tag{5.2}$$

Nel seguito tratteremo solo modelli unidimensionali; l'estensione a più dimensioni, nella maggior parte dei casi, è immediata; sottolineeremo i punti in cui, nel caso n-dimensionale, sono richieste delle ipotesi leggermente diverse.

5.3 Calcolo di Rho

Sia $u(x) = E[\varphi(X_T^x)]$, con $\varphi \in L^2$. Scriveremo X_T^x invece di X_T ogni volta che sarà necessario sottolineare la dipendenza dalla condizione iniziale $X_0 = x$. Vogliamo calcolare la sensibilità di $u(x)$ alle variazioni di r. Consideriamo il processo perturbato:

$$dX_t^\varepsilon = X_{t-}^\varepsilon \left((r(t) + \varepsilon\gamma(t, X_{t-}^\varepsilon))dt + \sigma(t)dW_t + d\left(\sum_{j \le P_t} U_j - t\lambda E[U_j] \right) \right).$$

L'approccio proposto da [9] consiste nel trasferire la perturbazione al processo di Wiener:

$$dX_t^\varepsilon = X_{t-}^\varepsilon \left(r(t)dt + \sigma(t)dW_t^\varepsilon + d\left(\sum_{j \le P_t} U_j - t\lambda E[U_j] \right) \right),$$

dove $W_t^\varepsilon = W_t + \varepsilon \int_0^t (\sigma(t)X_t^\varepsilon)^{-1}\gamma(t, X_t^\varepsilon)dt$.

Proposizione 5.1. *Sia $u^\varepsilon(x) = E[\varphi(X_T^\varepsilon)|X_0^\varepsilon = x]$; se $\gamma : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è limitata e $\sigma > c > 0$, allora la funzione $\varepsilon \to u^\varepsilon(x)$ è differenziabile in 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$ e si ha:*

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} u^\varepsilon(x)\bigg|_{\varepsilon=0} = E\left[\varphi(X_T^x) \int_0^T (\sigma(t)X_t^x)^{-1}\gamma(t, X_t^x)dW_t \right]. \tag{5.3}$$

Dimostrazione. Definiamo

$$\eta_t^\varepsilon := \exp\left[-\varepsilon \int_0^t (\sigma(s)X_s^x)^{-1}\gamma(s, X_s^x)dW_s - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^t ((\sigma(s)X_s^x)^{-1}\gamma(s, X_s^x))^2 ds \right]; \tag{5.4}$$

il processo $(\eta_t^\varepsilon)_{t\ge0}$ è una martingala per ogni $\varepsilon > 0$ e in particolare $E[\eta_T^\varepsilon] = 1$. Possiamo quindi considerare la probabilità $\mathbb{Q}^\varepsilon$ equivalente a $\mathbb{P}$ tale che $\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} = \eta_T^\varepsilon$ sotto la quale

$$u^\varepsilon(x) = E^{\mathbb{Q}^\varepsilon}\left[\varphi(X_T^\varepsilon)\zeta_T^\varepsilon \middle| X_0^\varepsilon = x \right],$$

dove $\zeta_T^\varepsilon = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^\varepsilon}$, quindi:

$$\zeta_T^\varepsilon = \exp\left[\varepsilon \int_0^T (\sigma(t)X_t^\varepsilon)^{-1}\gamma(t, X_t^\varepsilon)dW_t^\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T ((\sigma(t)X_t^\varepsilon)^{-1}\gamma(t, X_t^\varepsilon))^2 dt \right].$$

W_T^ε è un processo di Wiener sotto $\mathbb{Q}^\varepsilon$ per il teorema di Girsanov, e inoltre la distribuzione congiunta di $(X^\varepsilon, W^\varepsilon)$ sotto $\mathbb{Q}^\varepsilon$ e quella di (X, W) sotto $\mathbb{P}$ coincidono, ne segue che:

$$u^\varepsilon = E\left[\varphi(X)\xi_T^\varepsilon \middle| X(0) = x\right],$$

dove

$$\xi_T^\varepsilon = \exp\left[\varepsilon \int_0^T (\sigma(t)X_t^x)^{-1}\gamma(t, X_t^x)dW_t - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^T ((\sigma(t)X_t^x)^{-1}\gamma(t, X_t^x))^2 dt\right].$$

Ma $\left(\frac{1}{\varepsilon}\xi_T^\varepsilon - 1\right)$ converge in L^2 a $\int_0^T \sigma^{-1}\gamma(t, X_t)dW_t$ e quindi dall'eguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon(x) - u(x)) - E\left[\varphi(X_t^x)\int_0^T (\sigma(t)X_t^x)^{-1}\gamma(t, X_t^x)dW_t\right]\right|$$

$$\leq CE\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}(\xi_T^\varepsilon - 1) - \int_0^T (\sigma(t)X_t^x)^{-1}\gamma(t, X_t^x)dW_t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Con $C = E\left[\varphi(X^x)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ che per ipotesi è finito. Passando al limite per ε che tende a 0 otteniamo la (5.3). $\square$

Osservazione 5.2. *Nel caso n-dimensionale si richiede che la matrice di diffusione σ soddisfi la condizione di* ***uniforme ellitticità****: esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\xi, x \in \mathbb{R}^n$*

$$\xi^* \sigma^*(x)\sigma(x)\xi \geq \varepsilon|\xi|^2.$$

La dimostrazione della proposizione precedente non è altro che una semplice applicazione del teorema di Girsanov per un processo di Wiener (paragrafo 3.1). Ma il modello di prezzo che stiamo considerando ha un' "aleatorietà" in più: quella data dal processo di Poisson composto $\sum_{n\leq P_t} U_n$. Cerchiamo dunque di tenere conto anche di questo elemento sfruttando il teorema di Girsanov per misure aleatorie. Dall'osservazione 3.6 sappiamo che nel passaggio ad una probabilità equivalente non sempre un processo di Poisson composto resta tale, non viene neppure conservata l'indipendenza degli incrementi. Questo ci costringe a restringere la classe di variazioni γ del coefficiente di drift. In particolare supporremo che $\gamma(t, X) = \gamma'(t)X$ con γ' limitata, che possiamo riscrivere

$$\gamma(t, X) = -\lambda E[U_j]h(t)X$$

per h opportuna, che quindi è anch'essa limitata. Supporremo inoltre che per ε piccolo si abbia $\varepsilon h(s) > -1$ per ogni $s \in [0, T]$. Allora possiamo riscrivere il processo perturbato come:

$$dX_t^\varepsilon = X_{t-}^\varepsilon \left[r(t)dt + \sigma(t)dW_t + d\left(\sum_{j \leq P_t} U_j - \lambda E[U_j] \int_0^t (1+\varepsilon h(s))ds \right) \right],$$

ed applicare a questo il teorema di Girsanov. Si ottiene dunque che, sotto la probabilità $\mathbb{Q}^\varepsilon$ tale che

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{Q}^\varepsilon}{d\mathbb{P}} &= \eta_T \\
&= \exp\left[-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varepsilon h(s)\nu(ds,dx) \right] \exp\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \ln(1+\varepsilon h(s))\mu(ds,dx) \right] \\
&= \exp\left[-\lambda \int_0^T \varepsilon h(s)ds \right] \exp\left[\sum_{\tau_n \leq T} \ln(1+\varepsilon h(\tau_n))) \right] \\
&= \exp\left[-\lambda \int_0^T \varepsilon h(s)ds \right] \prod_{\tau_n \leq T} (1+\varepsilon h(\tau_n))
\end{aligned}$$

la legge di $(X_t^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ è uguale alla legge di (X_t, ν) sotto $\mathbb{P}$. Pertanto si ha che:

$$E[\varphi(X_T^\varepsilon)] = E^{\mathbb{P}}[\varphi(X_T^\varepsilon)] = E^{\mathbb{Q}^\varepsilon}[\varphi(X_T^\varepsilon)\zeta_T^\varepsilon] = E^{\mathbb{P}}[\varphi(X_T)\xi_T^\varepsilon] \tag{5.5}$$

dove $\zeta_T^\varepsilon = \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}^\varepsilon}$; quindi analogamente a prima:

$$\zeta_T^\varepsilon = \exp\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varepsilon \frac{h(s)}{1+\varepsilon h(s)} \nu^\varepsilon(ds,dx) \right] \prod_{\tau_n \leq T} \left(1 - \varepsilon \frac{h(\tau_n)}{1+\varepsilon h(\tau_n)} \right).$$

Sostituendo $\nu(ds,dx)$ a $\nu^\varepsilon(ds,dx)$ nell'espressione di ζ_T^ε si ottiene ξ_T^ε che verifica l'ultima eguaglianza di (5.5).

$$\xi_T^\varepsilon = \exp\left[\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \varepsilon \frac{h(s)}{1+\varepsilon h(s)} \nu(ds,dx) \right] \prod_{\tau_n \leq T} \left(1 - \varepsilon \frac{h(\tau_n)}{1+\varepsilon h(\tau_n)} \right).$$

Dato che

$$\pi^P := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\xi_T^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} h(s)(\mu - \nu)(ds,dx) = \sum_{\tau_n \leq T} h(\tau_n) - \lambda \int_0^T h(s)ds$$

possiamo concludere che

$$\rho = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\frac{\varphi(X_T^\varepsilon) - \varphi(X_T)}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} E\left[\varphi(X_T) \frac{\xi_T^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \right] = E[\varphi(X_T)\pi^P].$$

Presentiamo, a titolo di esempio, il calcolo dei due pesi

$$\pi^W = \int_0^T (\sigma(t)X_t)^{-1}\gamma(t,X_t)dW_t$$

e π^P nel caso in cui si scelgono $r(t) = r$ e $\sigma(t) = \sigma$ costanti e $\gamma(t, X_t) = X_t$, otteniamo:

$$\pi^W = \frac{W_T}{\sigma}$$

e

$$\pi^P = -\frac{1}{\lambda E[U_j]} P_T + E[U_j]T.$$

Osservazione 5.3. *I pesi π^W e π^P sono intrinsecamente diversi, infatti "scaricare" la variazione di r sul processo di Wiener o sulla misura aleatoria μ equivale a scegliere due diverse probabilità martingala equivalenti.*

Nel primo caso, infatti, la variazione si sposta al processo di Wiener, ma restano invariate le altre caratteristiche del prezzo X (la volatilità σ, l'intensità del processo di Poisson λ e la legge dei salti).

Nel secondo caso, invece, quest'operazione provoca un cambiamento dell'intensità del processo di Poisson e della legge dei salti.

L'origine della differenza di questi due procedimenti risiede dunque nell'incompletezza del modello.

Osservazione 5.4. *Possiamo applicare i ragionamenti precedenti anche "scaricando" una parte della variazione al processo di Wiener e l'altra parte al processo di Poisson: cioè, se $a \in [0, 1]$, possiamo scrivere:*

$$\varepsilon\gamma(t, X^{\varepsilon}_{t-}) = a\varepsilon\gamma(t, X^{\varepsilon}_{t-}) + (1 - a)\varepsilon\gamma(t, X^{\varepsilon}_{t-}),$$

e, applicando le stesse tecniche già utilizzate in questo paragrafo, ottenere il peso

$$\pi = a\pi^W + (1 - a)\pi^P,$$

una combinazione convessa degli altri due.

5.4 Calcolo di Delta

Vogliamo ora calcolare

$$\Delta = e^{-r'T} \frac{\partial E\left[\varphi(X^x_T)\right]}{\partial x}$$

dove X^x_T è dato dall'equazione (5.2).

Come prima, anche in questo caso proponiamo il confronto tra i diversi pesi ottenuti derivando rispetto al processo di Wiener, all'ampiezza dei salti e al processo di Poisson.

5.4.1 Caso Wiener: formula di Bismut-Elworthy

Osserviamo innanzitutto che il processo $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ è “separabile”, nel senso che per ogni $t \in [0,T]$ X_t^x si può esprimere come il prodotto: $X_t^x = X_t^c X_t^d$, in cui X_t^c è continuo e X_t^d contiene le discontinuità a salto. Più precisamente X_t^c soddisfa l’equazione differenziale stocastica:

$$\begin{cases} dX_t^c = r(t)X_t^c dt + \sigma(t)X_t^c dW_t \\ X_0^c = x, \end{cases}$$

e X_t^d è adattato alla filtrazione naturale $\mathcal{F}_t^N$ del processo di Poisson N. È utile osservare che X_t^d non dipende dal prezzo iniziale x. Questo ci permette di applicare a X_t la regola della catena nella forma (4.7).

Definiamo il processo di variazione prima:

$$\begin{cases} Y_t = r(t)Y_t dt + \sigma(t)Y_t dW_t \\ Y_0 = 1; \end{cases} \tag{5.6}$$

Si ha che $Y_t = \frac{\partial X_t^c}{\partial x}$ per ogni $t \in [0,T]$ e vogliamo verificare che $DX_t^c = Y_t Y_s^{-1}\sigma(X_s^c)\chi_{\{s\leq t\}}$. Sia dunque Z_t la soluzione dell’equazione differenziale:

$$\begin{cases} Z_t = \sigma(t)Z_t dW_t - (r(t)(X_t^c) - \sigma(t)^2)Z_t dt \\ Z_0 = 1. \end{cases}$$

Dalla formula di Itô si ricava che

$$\begin{aligned} dY_s Z_s &= dZ_s Y_s \\ &= Y_s dZ_s + Z_s dY_s + d[Y,Z]_s \\ &= Y_s(-\sigma(s)Z_s dW_s - r_c(s)Z_s ds + \sigma(s)^2 Z_s ds) \\ &+ Z_s(\sigma(s)Y_s dW_s + r_c(s)Y_s ds) - \sigma(s)^2 Y_s Z^s ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Allora $Z_s Y_s = Z_0 Y_0 = 1$ e $Y_s Z_s = Y_0 Z_0 = 1$, quindi $Z = Y^{-1}$. Dato che il processo $D_s X_t$ è la soluzione unica dell’equazione :

$$dD_s X_t = \sigma(t)D_s X_t dt + r(t)_c(t)D_s X_t dt,\ D_s X_0 = \sigma(X_s^c),$$

si ha:

$$D_s X_t = Y_t Z_s \sigma(s). \tag{5.7}$$

Proposizione 5.5. *Sia $u(x) = E[\varphi(X_T^x)]$. Supponiamo che $\sigma(t) > c > 0$ per ogni $t \in [0,T]$; definiamo l’insieme*

$$\Gamma = \left\{ a \in L^2(0,T) : \int_0^T a(t)dt = 1 \right\}.$$

Per ogni $a \in \Gamma$ si ha:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = E\left[\varphi(X_T)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right]. \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che φ sia $\mathcal{C}^1$ con derivata limitata. Indichiamo con K una costante tale che $|\varphi'| \leq K$. Vogliamo provare innanzitutto che la derivata di $u(x)$ rispetto a x si può calcolare derivando all'interno della speranza. Dal fatto che $\varphi \in \mathcal{C}^1$ segue che:

$$\frac{1}{|h|}\left[\varphi(X_T^x) - \varphi(X_T^{x+h})\right] - \frac{1}{|h|}\left\langle \varphi'(X_T^x)\frac{\partial X_T^x}{\partial x}, h\right\rangle \tag{5.9}$$

converge a 0 quando h tende a 0. Dato che X_T^d non dipende da x possiamo scrivere

$$\frac{\partial X_T^x}{\partial x} = \frac{\partial X_T^x}{\partial X_T^c} Y_T;$$

Dalla limitatezza di φ' e di $\frac{\partial X_T^x}{\partial X_T^c}$ si deduce che $\frac{1}{|h|}\langle \varphi'(X_T^x)\frac{\partial X_T^x}{\partial x}, h\rangle$ è uniformemente integrabile in h. Inoltre anche in presenza di salti la funzione $x \to X_T^x$ è continua, quindi

$$\left|\Lambda_h\right| = \frac{1}{|h|}\left|\left[\varphi(X_T^x) - \varphi(X_T^{x+h})\right]\right| \leq \frac{K}{|h|}\left|X_T^x - X_T^{x+h}\right|.$$

Da ciò segue l'uniforme integrabilità di Λ_h (si veda [19]). Grazie al teorema di convergenza dominata ricaviamo che (5.9) converge a 0 in $L^2(\Omega)$. Otteniamo:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\right] = E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial X_T^c} Y_T\right]. \tag{5.10}$$

Il processo $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ appartiene a $\mathbb{D}^{1,2}$. Usando la regola della catena (4.7) e la formula (5.7) otteniamo che per ogni $t \in [0,T]$

$$D_t X_s = \frac{\partial X_s}{\partial X_s^c} D_t X_s^c = \frac{\partial X_s}{\partial X_s^c} Y_s Y_t^{-1}\sigma(X_t^c)\chi_{[0,s]}(t).$$

Quindi per ogni $a \in \Gamma$ possiamo scrivere

$$\frac{\partial X_T}{\partial X_T^c} Y_T = \int_0^T a(t)(D_t X_T)\sigma^{-1}(t) Y_t dt.$$

Sostituendo quest'ultima equazione all'interno di (5.10) e applicando la regola della catena, si arriva all'espressione:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x)}{\partial x} &= E\left[\int_0^T \varphi'(X_T)(D_t X_T)a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t\right] \\ &= E\left[\int_0^T (D_t)\varphi(X_T)a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t\right].\end{aligned}$$

Da cui, applicando la formula di integrazione per parti, otteniamo l'espressione voluta:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = E\left[\varphi(X_T)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right].$$

Verifichiamo ora che lo stesso risultato si estende a $\varphi \in L^2$. Sia $(\varphi_n)_n$ una successione di funzioni $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto che converge a φ in L^2. Chiamiamo $u_n = E[\varphi_n(X_t)]$; per ogni $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) \to u(x)$. Utilizzando il risultato già dimostrato per le funzioni φ_n e la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz otteniamo:

$$\left| u_n(x) - E\left[\varphi(X_T)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right]\right| \leq \alpha_n(x)\beta(x)$$

dove $\alpha_n(x) = E\left[\varphi_n(X_T) - \varphi(X_T)\right]^2$ e $\beta(x) = E\left[\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right]^2$. Se $K \subset \mathbb{R}$ è un compatto allora

$$\sup_{x\in K}\left| u_n(x) - E\left[\varphi(X_T)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right]\right| \leq \alpha_n(\tilde{x})\beta(\tilde{x})$$

per qualche $\tilde{x} \in K$. Quindi $\varphi_n'(x)$ converge uniformemente sui compatti a $E\left[\varphi(X_T)\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right]$. Ciò permette di concludere che $u \in \mathcal{C}^1$ e di ricavare la formula (5.8). □

Osservazione 5.6. *Lo stesso ragionamento si applica a derivate di ordine superiore e al caso in cui* φ *dipenda da* $X_{t_1}^x, \ldots, X_{t_n}^x$ *con* $n \in \mathbb{N}$. *Quest'estensione, in particolare, si può usare per il calcolo numerico di Delta anche nel caso di un'opzione asiatica. Infatti basta aprossimare*

$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t^x dx \simeq \frac{1}{T}\sum_{i=1}^n X_{t_i}(t_i - t_{i-1}).$$

5.4.2 Derivazione rispetto all'ampiezza dei salti

Procedendo come nella dimostrazione 5.5 ci limitiamo a lavorare con payoff φ che siano $\mathcal{C}^1$ con derivata limitata, con un argomento di densità i risultati ottenuti si estendono, come prima, alle $\varphi \in L^2$. Possiamo dunque scrivere:

$$\begin{aligned}
\Delta &= e^{-r'T}\frac{\partial}{\partial x}E\left[\varphi(X_T)\right] \\
&= e^{-r'T}E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\right] \\
&= e^{-r'T}E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\chi_{\{P_T=0\}}\right] + \sum_{n=1}^\infty e^{-r'T}E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\chi_{\{P_T=n\}}\right] \\
&= e^{-r'T}E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\chi_{\{P_T=0\}}\right] \\
&\quad + \sum_{n=1}^\infty e^{-r'T}E\left[E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\middle|\mathcal{G}\right]\chi_{\{P_T=n\}}\right],
\end{aligned}$$

dove $\mathcal{G}$ è la tribù generata dai tempi d'arresto $(\tau_n)_{n\geq 0}$.

Su $\{P_T = 0\}$ X_T non ha salti, in particolare $X_T = X_T^c$ dipende solo dal processo di Wiener; su questo insieme, usando come prima la formula di integrazione per parti, ottenamo:

$$E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\chi_{P_T=0}\right] = E\left[\varphi(X_T)\left(\int_0^T a(t)\sigma^{-1}(t)Y_t dW_t\right)\chi_{P_T=0}\right].$$

Supponiamo ora che $P_T = n \neq 0$. Applicando la formula di integrazione per parti (4.24), che considera, oltre all'aleatorietà data dal processo W, anche quella data da $U_1, \ldots, U_n$, si ottiene:

$$E\left[\varphi'(X_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}|\mathcal{G}\right]\chi_{\{P_T=n\}} = E\left[\varphi(X_T)I_n\left(X_T, \frac{\partial X_T}{\partial x}\right)|\mathcal{G}\right]\chi_{\{P_T=n\}}.$$

Possiamo dunque scrivere:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[E\left[\varphi'(S_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\Big|\mathcal{G}\right]\chi_{\{P_T=n\}}\right] = E\left[\varphi(X_T)I_{P_T}\left(X_T, \frac{\partial X_T}{\partial x}\right)\chi_{\{P_T\geq 1\}}\right].$$

In pratica quando calcoliamo Delta utilizzando un metodo Monte-Carlo

- per $i = 1, \ldots, M$ simuliamo gli istanti di salto $(\tau_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$, le corrispondenti ampiezze dei salti $(U_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ e ricaviamo il valore di P_T^i;

- includiamo gli istanti di salto tra quelli utilizzati per la discretizzazione $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_K = T$;

- per $i = 1, \ldots, M$, simuliamo $\Delta_0^i W, \ldots, \Delta_{m(t)-1}^i W$ (in cui abbiamo posto $\Delta_k^i W = W_{t_{k+1}}^i - W_k^i$) e calcoliamo $\tilde{X}_T^i$ utilizzando il seguente schema:

$$\begin{aligned}\tilde{X}_t^i = X_{t_m}\exp\Big[&\textstyle\sum_{k=0}^{m(t)-1}\left(r(t_k) - \frac{\sigma^2(t_k)}{2}\right)(t_{k+1} - t_k)\\ &+ \textstyle\sum_{k=0}^{m(t)-1}\sigma(t_k)(\Delta k^i W)\Big]\prod_{j=1}^{P_T^i}(1 + U_j^i),\end{aligned} \tag{5.11}$$

  dove $m(t) = m$ se $t_m \leq t < t_{m+1}$;

- calcoliamo $I_{P_T^i}\left(X_T, \frac{\partial X_T}{\partial x}\right)$, per $i = 1, \ldots, M$;

- stimiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left[E\left[\varphi'(S_T)\frac{\partial X_T}{\partial x}\Big|\mathcal{G}\right]\chi_{\{P_T=n\}}\right] \simeq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\varphi(X_T^i)I_{P_T^i}^i\chi_{\{P_T^i\geq 0\}}.$$

All'equazione (5.11) corrisponde l'equazione deterministica

$$\tilde{x}_t = x_{t_m} e^{\left[\sum_{k=0}^{m(t)-1}\left(r(t_k)-\frac{\sigma^2(t_k)}{2}\right)(\Delta_k t)+\sum_{k=0}^{m(t)-1}\sigma(t_k)(\Delta_k w)\right]} \prod_{j=1}^{P_T}(1+a_j),$$

dove $\Delta_k t = t_{k+1} - t_k$, $\Delta_k w = w_{t_{k+1}} - w_{t_k}$ e $\tilde{x}_0 = x$. Quindi su $\{P_t = n\}$ possiamo scrivere il prezzo approssimato $\tilde{X}_t$ come una funzione semplice degli istanti di salto $\tau_1, \dots, \tau_n$, dei salti $U_1, \dots, U_n$ e degli incrementi $\Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W$:

$$\tilde{X}_t = \tilde{x}_t(\tau_1, \dots, \tau_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W),$$

e applicare a quest'ultimo la teoria esposta nel paragrafo 4.3. In particolare possiamo calcolare le derivate di $\tilde{X}_t$

$$\begin{aligned}
\partial_{U_i}\tilde{X}_t &= \partial_{a_i}\tilde{x}_t(\tau_1, \dots, \tau_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W),\\
\partial^2_{U_i,U_j}\tilde{X}_t &= \partial^2_{a_i,a_j}\tilde{x}_t(\tau_1, \dots, \tau_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W),\\
\partial_x\tilde{X}_t &= \partial_x\tilde{x}_t(\tau_1, \dots, \tau_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W),\\
\partial_{\Delta_k W}\tilde{X}_t &= \partial_{\Delta_k w}\tilde{x}_t(\tau_1, \dots, \tau_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma_t &= \sum_{i=1}^{n} |\partial_{a_i}\tilde{x}_t|^2 + \sum_{1=0}^{m(t)-1} |\partial_{\Delta_i w}\tilde{x}_t|^2 \geq \sum_{1=0}^{m(t)-1} |\partial_{\Delta_i w}\tilde{x}_t|^2\\
&\geq |\partial_{\delta_{m(t)-1} w}\tilde{x}_t|^2 = |\sigma(t_{m(t)-1})|^2 \geq \varepsilon^2 > 0.
\end{aligned}$$

Possiamo ora applicare la formula di integrazione per parti (4.24) dove

$$F = \varphi'(\tilde{X}_T(t_1, \dots, t_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W))$$

e

$$G = \frac{\partial \tilde{X}_T}{\partial x}(t_1, \dots, t_n, U_1, \dots, U_n, \Delta_0 W, \dots \Delta_{m(t)-1} W).$$

Confrontiamo i pesi calcolati in questo paragrafo e in quello precedente in un caso semplice: prendiamo $r(t) = r$ e $\sigma(t) = \sigma$ costanti. Inoltre, per $j \geq 1$, scegliamo i salti U_j della forma:

$$U_j = e^{V_j} - 1, \tag{5.12}$$

dove V_j è una variabile aleatoria di legge normale $\mathcal{N}(0,1)$. Allora, scegliendo $a(t) = \frac{1}{T}$, per $t \in [0,T]$, otteniamo:

$$\pi^W_\Delta = \int_0^T a(t)\sigma^{-1} Y_t dW_t = \frac{W_T}{x\sigma T},$$

e su $\{P_T = n\}$
$$\pi^P_\Delta = I(F,G) = \frac{\sum_{k=1}^n V_k + \sigma \frac{W_T}{T}}{x(n+\sigma^2)}.$$
Osserviamo infine che, se $n = 0$, cioè quando non ci sono salti, i due pesi coincidono, mentre se il prezzo (X_t) non dipende dal processo di Wiener (W_t), possiamo comunque calcolare π^P_Δ, ottenendo, su $\{P_T = n\}$:
$$\pi^P_\Delta = \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{xn}.$$

5.4.3 Caso Poisson

Vogliamo ora applicare il calcolo di Malliavin rispetto al processo di Poisson alla determinazione del peso π che interviene nel calcolo di Delta. Bisogna però restringerci a dei casi particolari. Innanzitutto abbiamo già osservato come un'opzione europea $(\varphi(X_T))$ non sia derivabile rispetto al processo di Poisson. Ci occuperemo, dunque, di opzioni asiatiche, cioè opzioni il cui payoff dipende da:
$$\frac{1}{T}\int_0^T X_t dt.$$
Consideriamo un modello in cui il prezzo del sottostante non dipenda da (W_t), vedremo in seguito perché questa scelta si rende necessaria.

Proposizione 5.7. *Chiamiamo $m^x = \frac{1}{T}\int_0^T X^x_t dt$. Sia $h_t \in CM$ tale che*
$$D^P_h m^x \neq 0 \text{ q.o. su } \left\{\frac{\partial m^x}{\partial x} \neq 0\right\}$$
e tale che $h\frac{\partial_x m^x}{D_h m^x} \in \mathrm{Dom}\delta^P$. Allora:
$$\frac{\partial}{\partial x}E[\varphi(m^x)] = E\left[\varphi(m^x)\delta^P\left(h\frac{\partial_x m^x}{D_h m^x}\right)\right].$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\varphi \in \mathcal{C}^1$ con derivate limitate. Allora "derivando all'interno della speranza" e sfruttando la regola della catena otteniamo:
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}E[\varphi(m^x)] &= E[\varphi'(m^x)\partial_x m^x] && (5.13)\\
&= E\left[\frac{\partial_x m^x}{D^P_h m^x}D^P_h\varphi(m^x)\right] && (5.14)\\
&= E\left[\varphi(m^x)\delta^P\left(h\frac{\partial_x m^x}{D^P_h m^x}\right)\right]. && (5.15)
\end{aligned}$$
Questo risultato si estende per densitá alle $\varphi \in L^2$. □

Sfruttando la (4.19) possiamo esplicitare l'integrale di Skorohod che compare nella proposizione precedente ottenendo:

$$\begin{aligned}\delta^P\left(h\frac{\partial_x m^x}{D_h^P m^x}\right) &= \frac{\partial_x m^x}{D_h^P m^x}\int_0^T h_t' dP_t \\ &\quad -\frac{D_h^P \partial m^x}{D_h m^x} + \frac{\partial_x m^x}{(D_h^P m^x)^2} D_h^P D_h^P m^x.\end{aligned}$$

Dato che $\partial_x m^x = xm(1)$ (che scriveremo semplicemente xm) possiamo semplificare l'espressione precedente:

$$\delta^P\left(h\frac{\partial_x m^x}{D_h^P m^x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{m}{D_h^P m}\int_0^T h_t' dN_t - 1 + \frac{m}{(D_h^P m)^2 D_h^P D_h^P m}\right).$$

Osservazione 5.8. *Se il prezzo (X_t) dipende anche dal processo di Wiener (W_t), la proposizione precedente non è applicabile. Nel peso calcolato nella* (5.13) *compare il termine $D_h^P\left(D_h^P \int_0^T X_t dt\right)$; se supponiamo che, come nel caso del modello di Merton, il prezzo $X = (X_t)$ sia della forma:*

$$X_t = F(t, P_t)G(W_t),$$

allora $\int_0^T X_t dt \in \mathrm{Dom} D_h^P$ e si ha:

$$\begin{aligned}D_h^P\left(\int_0^T X_t dt\right) = \int_0^T h_t(F(t,P_t)G(W_t) &- F(t,P_t-1)G(W_t))dP_t \\ &+ \int_0^T \left[D_h^P\left(F(t,P_t)G(W_t)\right)\right] dt;\end{aligned}$$

ma ora $\int_0^T h_t\left(F(t,P_t)G(W_t) - F(t,P_t-1)G(W_t)\right) dP_t \notin \mathrm{Dom} D_h^P$.

5.5 Calcolo di Vega

5.5.1 Caso Wiener

Vogliamo calcolare ora la sensibilità di $E[\varphi(X_T)]$ alle variazioni della volatilità, cioè

$$\mathcal{V} = e^{-r'T}\frac{\partial E[\varphi(X_T)]}{\partial \sigma}.$$

Consideriamo, come nel caso di Rho, il processo perturbato:

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = X_{t-}^\varepsilon\left(r(t)dt + (\sigma(t)+\varepsilon\gamma(t))dW_t + d(\sum_{j\le P_t} U_j - t\lambda E[U_j])\right) \\ X_0^\varepsilon = x, \end{cases}$$

dove $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,T])$ con derivate limitate. Definiamo inoltre il processo (Z_t^ε) tale che $Z_t^\varepsilon = \frac{\partial X_t^\varepsilon}{\partial \varepsilon}$:

$$\begin{aligned} dZ_t^\varepsilon = &\ Z_{t-}^\varepsilon \quad (r(t)dt + (\sigma(t) + \varepsilon\gamma(t))Z_{t-}^\varepsilon dW_t) + \gamma(t)X_t^\varepsilon dW_t \\ + &\ d\left(\sum_{j \le P_t} U_j - t\lambda E[U_j]\right) Z_{t-}^\varepsilon, \end{aligned}$$

con $Z_0^\varepsilon = 0$ e l'insieme

$$\Gamma_n = \left\{ a \in L^2(0,T) : \int_{t_{i-1}}^{t_i} a(t)dt, \forall i = 1, \ldots, n, 0 = t_0 < \ldots < t_n = T \right\}.$$

La seguente proposizione fornisce il peso che interviene nel calcolo di Vega.

Proposizione 5.9. *Sia $v^\varepsilon(x) = E[\varphi(X_{t_1}^\varepsilon, \ldots, X_{t_n}^\varepsilon)]$; se per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $t \in [0,T]$, $\sigma(t) + \varepsilon\gamma(t) > c > 0$ e*

$$\sigma^{-1}(X^c)Y\beta \in \mathrm{Dom}\delta, \quad \text{con } \beta_{t_i} = \left(\frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c}\right)^{-1} Z_{t_i}.$$

Allora la funzione $\varepsilon \to v^\varepsilon(x)$ è differenziabile in 0 per ogni $x \in \mathbb{R}$ e, per ogni $a \in \Gamma_n$, si ha:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \varepsilon} v^\varepsilon(x)\right|_{\varepsilon=0} = E[\varphi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})\delta(\sigma^{-1}(X_\cdot^c)Y_\cdot\tilde{\beta}_\cdot)],$$

dove $\tilde{\beta}_t = \sum_{i=1}^n a(t)(\beta_{t_i} - \beta_{t_{i-1}})\chi_{[t_{i-1} - t_i[}(t)$.

Dimostrazione. Come nella proposizione 5.5, possiamo restringerci al caso in cui $\varphi \in \mathcal{C}^1$ con derivate limitate e "derivare all'interno della speranza":

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} v^\varepsilon(x) = E\left[\sum_{i=1}^n \nabla_i \varphi(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}) Z_{t_i}^\varepsilon\right]. \tag{5.16}$$

Definiamo $\beta_t = \left(\frac{\partial X_t}{\partial X_t^c} Y_t\right)^{-1} Z_t^0$. Dato che $DsX_t^c = Y_t Y_s^{-1}\sigma(X_s^c)\chi_{\{s \le t\}}$ e che $a \in \Gamma_n$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c}(D_t X_{t_i}^c)\sigma^{-1}(X_t^c)Y_t\tilde{\beta}_t dt &= \int_0^{t_i} \frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c} Y_{t_i}\tilde{\beta}_t dt \\ &= \frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c} Y_{t_i} \sum_{j=1}^i \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(t)(\beta_{t_j} - \beta_{t_{j-1}})dt \\ &= \frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c} Y_{t_i}\beta_{t_i} \\ &= Z_{t_i}. \end{aligned}$$

Sostituendo questa relazione in (5.16) e usando la regola della catena otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}v^\varepsilon(x) &= E\left[\int_0^T\sum_{i=0}^n \nabla_i\varphi(X_{t_1}^\varepsilon,\dots,X_{t_n}^\varepsilon)\frac{\partial X_{t_i}}{\partial X_{t_i}^c}(D_tX_{t_i}^c)\sigma^{-1}(X_t^c)Y_t\tilde{\beta}_t dt\right]\\ &= E\left[\int_0^T(D_t\varphi(X_{t_1}^\varepsilon,\dots,X_{t_n}^\varepsilon))\sigma^{-1}(X_t^c)Y_t\tilde{\beta}_t dt\right].\end{aligned}$$

Nelle precedenti uguaglianze abbiamo usato il fatto che $\beta_t\in\mathbb{D}^{1,2}$ per ogni $t\in[0,T]$ (cfr [6] lemma 3.2 pag.111). Per ipotesi $\sigma^{-1}(X^c)Y\beta\in$ Domδ, quindi per la linearità dell'integrale Skorohod anche $\sigma^{-1}(X^c)Y\tilde{\beta}\in$ Domδ. Applicando la formula di integrazione per parti possiamo concludere:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\varepsilon}v^\varepsilon(x)\right|_{\varepsilon=0} = E[\varphi(X_{t_1}^\varepsilon,\dots,X_{t_n}^\varepsilon)\delta(\sigma^{-1}(X_\cdot^c)Y_\cdot\tilde{\beta}_\cdot)].$$

□

Osservazione 5.10. *Per estendere la proposizione precedente al caso n-dimensionale si deve richiedere che, per ogni $\varepsilon>0$ e per ogni $t\in[0,T]$, la matrice $\sigma(t)+\varepsilon\gamma(t)$ sia uniformemente ellittica.*

5.5.2 Derivazione rispetto all'ampiezza dei salti

Si procede esattamente come nel caso di Delta, riconducendo il problema a quello di derivare il prezzo aprossimato $\tilde{X}_t$. In questo caso si applica la formula di integrazione per parti (4.24) dove

$$F=\varphi'(\tilde{X}_T(t_1,\dots,t_n,U_1,\dots,U_n,\Delta_0W,\dots\Delta_{m(t)-1}W))$$

e

$$G=\frac{\partial\tilde{X}_T}{\partial\sigma}(t_1,\dots,t_n,U_1,\dots,U_n,\Delta_0W,\dots\Delta_{m(t)-1}W).$$

Confrontiamo ora i pesi ottenuti nel calcolo di Vega sempre nel caso di $r(t)=r$ e $\sigma(t)=\sigma$ costanti e con U_j che verifica l'equazione (5.12). Se prendiamo $a(t)=\frac{1}{T}$, per $t\in[0,T]$, si ottiene:

$$\pi_{\mathcal{V}}^W=\frac{W_T^2}{\sigma T}-W_T-\frac{1}{\sigma}$$

e su $\{P_T=n\}$

$$\pi_{\mathcal{V}}^P=I(F,G)=\frac{(W_T-\sigma T)\left(\sum_{k=1}^n V_k+\sigma\frac{W_T}{T}-\sigma\right)}{n+\sigma^2}.$$

Anche in questo caso, se $n=0$, i due pesi coincidono, mentre se (X_t) non dipende dal processo di Wiener, ricaviamo, su $\{P_T=n\}$,

$$\pi_{\mathcal{V}}^P=\frac{1}{n}(W_T-\sigma T)\sum_{k=1}^n V_k.$$

5.5.3 Caso Poisson

Scegliendo un modello di prezzo che non dipenda dal processo W e ricalcando la dimostrazione già vista nel caso di Delta, otteniamo la seguente:

Proposizione 5.11. *Chiamiamo* $m = \frac{1}{T}\int_0^T X_t dt$. *Sia* $h_t \in CM$ *tale che*

$$D_h^P m \neq 0 \text{ } q.o. \text{ } su \left\{\frac{\partial m}{\partial \sigma} \neq 0\right\}$$

e tale che $h\frac{\partial_\sigma m}{D_h m} \in \mathrm{Dom}\delta^P$. *Allora:*

$$\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial \sigma} E[\varphi(m)] = E\left[\varphi(m)\delta^P\left(h\frac{\partial_\sigma m}{D_h m}\right)\right].$$

5.6 Minimizzare la Varianza

Osservazione 5.12. *Se* π *è un peso, cioè verifica:*

$$E\left[\varphi'(X)Y\right] = E\left[\varphi(X)\pi\right]; \tag{5.17}$$

Allora anche $\pi_0 = E\left[\pi|\mathcal{F}_X\right]$ *ha la stessa proprietà.*

Inoltre π_0, peso $\mathcal{F}_X$-misurabile, è un minimo del funzionale convesso

$$\mathcal{V}(\pi) = E\left[|\varphi(X_T)\pi - E\left[\varphi(X_T)\pi\right]|^2\right]. \tag{5.18}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\pi) &= E\left[|\varphi(X)(\pi - \pi_0) + \pi(F)\pi_0 - E[\pi'(X)Y]|^2\right] \\
&= E\left[(\varphi(X)(\pi - \pi_0))^2\right] + E\left[(\pi(F)\pi_0 - E[\pi'(X)Y])^2\right] \\
&+ 2E\left[\varphi(X)(\pi - \pi_0)(\varphi(X)\pi_0 - E[\varphi'(X)Y])\right].
\end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned}
&E\left[\varphi(X)(\pi - \pi_0)(\varphi(X)\pi_0 - E[\varphi'(X)Y])\right] = \\
&= E\left[E\left[\varphi(X)(\pi - \pi_0)(\varphi(X)\pi_0 - E[\varphi'(X)Y])\right| \mathcal{F}_X\right]\right] = 0,
\end{aligned}$$

otteniamo che il minimo di $\mathcal{V}$ si ha per $\pi = \pi_0$.

Osservazione 5.13. *Se* π_1 *e* π_2 *sono due pesi di quadrato integrabile, allora* $E\left[\pi_1\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right] = E\left[\pi_2\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right]$ *quasi certamente. Infatti chiamiamo* $Z = E\left[\pi_1\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right] - E\left[\pi_2\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right]$, *allora* Z *è* $\mathcal{F}_{X_T}$ *misurabile ed è anch'esso di quadrato integrabile. Vogliamo verificare che* Z *è anche ortogonale a* $\mathcal{F}_{X_T}$, *cioè che* $E\left[Z\chi_C\right] = 0$ *per ogni* $C \in \mathcal{F}_{X_T}$. *Innanzitutto si ha che per ogni* $\varphi \in \mathcal{C}_c^1$

$$\begin{aligned}
E\left[Z\varphi(X)\right] &= E\left[E\left[\pi_1\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right] - E\left[\pi_2\middle|\mathcal{F}_{X_T}\right]\varphi(X)\right] \\
&= E\left[\pi_1\varphi(X)\right] - E\left[\pi_2\varphi(X)\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Una funzione χ_C con $C \in \mathcal{F}_{X_T}$ può essere scritta anche come $\chi_A(X)$ con $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Approssimiamo χ_A con delle $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^1$ tali che $\varphi_n \to \chi_A$ in L^2. Allora:

$$\begin{aligned} \Big| E\left[Z\chi_C\right] \Big| &= \Big| E\left[Z\chi_A(X)\right] - E\left[Z\varphi_n(X)\right] \Big| \\ &\leq E\left[|Z| |\chi_A(X) - \varphi_n(X)| \right] \\ &\leq E\left[Z^2\right] E\left[(\chi_A(X) - \varphi_n(X))^2\right]. \end{aligned}$$

Dalla convergenza di φ_n a χ_A dato che $E\left[Z^2\right] < \infty$ otteniamo che $Z = 0$ quasi certamente.

Quest’osservazione è piuttosto importante perché evidenzia il fatto che non è possibile, anche ricorrendo ad altri strumenti di calcolo, trovare un peso π che diminuisca ulteriormente la varianza 5.18 per ogni payoff φ.

Fissato un particolare payoff, però può essere interessante verificare qual è il peso π che fornisce più rapidemente il risultato cercato, cioè quello che converge in un minor numero di iterazioni.

Presentiamo di seguito alcune simulazioni con cui abbiamo confrontato i pesi ottenuti con metodi diversi. Molti articoli ormai classici (si veda [9], [8]) hanno evidenziato l’utilità del calcolo di Malliavin nel calcolo delle greche quando il payoff sia discontinuo e limitato, come ad es. nel caso di un’opzione digitale. Nel caso di payoff illimitati (come ad esempio nel caso di una call), invece, il calcolo di Malliavin non si rivela molto utile converge molto più lentamente del classico metodo delle differenze finite.

In figura 5.1 confrontiamo la velocità di convergenza nel calcolo di Delta con i pesi calcolati rispettivamente nel paragrafo 5.4.1 (rapresentato in rosso nell’immagine) e nel paragrafo 5.4.2 (in blu) per l’opzione digitale $\varphi(X_T) = \chi_{\{X_T>1\}}$. I parametri scelti per questa simulazione e quelle successive sono: $\lambda = 4,\ r = 0.2,\ \sigma = 0.2,\ T = 3,\ X_0 = 1$; inoltre le variabili aleatorie U_j per $j \geq 0$ sono date da:

$$U_j = e^V - 1,$$

dove V è una variabile aletoria di legge normale $\mathcal{N}(0,1)$. In figura 5.2 confrontiamo la velocità di convergenza nel calcolo di Delta con i pesi calcolati rispettivamente nel paragrafo 5.5.1 (rapresentato in rosso nell’immagine) e nel paragrafo 5.5.2 (in blu). È evidente, in questo caso come nel precedente, che entrambi i metodi convergono molto velocemente, ma che, sfruttando la derivazione rispetto all’ampiezza dei salti, la convergenza è leggermente migliore.

Figura 5.1: Delta: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte-Carlo con i pesi calcolati nel paragrafo 5.4.1 (usando la classica derivata di Malliavin) e nel paragrafo 5.4.2 (usando la derivata “rispetto all’ampiezza dei salti”). A destra: particolare.

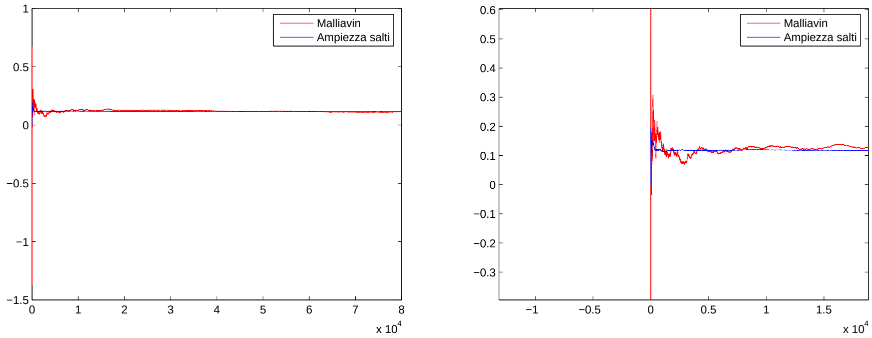
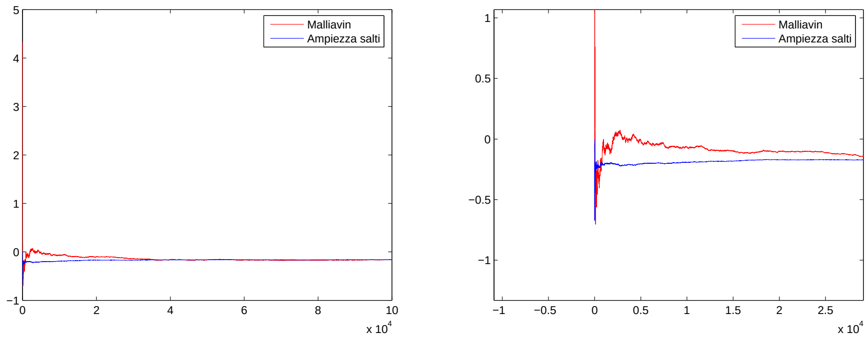


Figura 5.2: Vega: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte-Carlo con i pesi calcolati nel paragrafo 5.5.1 (usando la classica derivata di Malliavin) e nel paragrafo 5.5.2 (usando la derivata “rispetto all’ampiezza dei salti”). A destra: particolare.



In figura 5.3 confrontiamo la velocità di convergenza nel calcolo di Delta con i pesi calcolati rispettivamente nel paragrafo 5.4.3 (rapresentato in rosso nell’immagine) e nel paragrafo 5.4.2 (in blu), in figura 5.4 determiniamo Vega con i pesi calcolati rispettivamente nel paragrafo 5.5.3 (in rosso) e nel paragrafo 5.5.2 (in blu). Anche in questo caso si ottiene un risultato migliore derivando rispetto all’ampiezza dei salti. Ricordiamo, come abbiamo fatto notare nell’osservazione 5.8, che nelle simulazioni relative a queste figure $\sigma = 0$.

Figura 5.3: Delta: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte-Carlo con i pesi calcolati nel paragrafo 5.4.3 (usando la derivata rispetto al processo di Poisson) e nel paragrafo 5.4.2 (usando la derivata “rispetto all’ampiezza dei salti”).

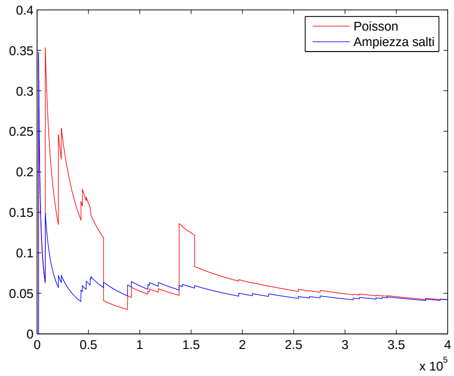
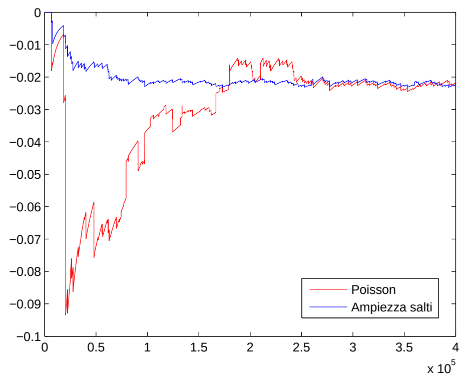


Figura 5.4: Delta: confronto delle velocità di convergenza dei metodi Monte-Carlo con i pesi calcolati nel paragrafo 5.5.3 (usando la derivata rispetto al processo di Poisson) e nel paragrafo 5.5.2 (usando la derivata “rispetto all’ampiezza dei salti”).



Bibliografia

[1] D. Applebaum. *Lévy processes and stochastic calculus.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics No.93. Cambridge University Press, 2004.

[2] V. Bally. An elementary introduction to Malliavin calculus. *Rapport de recherche no. 4718, INRIA*, 2003.

[3] M.-P. Bavouzet-Morel and M. Messaoud. Computation of Greeks using Malliavin's calculus in jump type models. *Electronic Journal of Probability*, 11:276–300, 2006.

[4] T. Bjork. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford Press, 2004.

[5] E. Carlen and E. Pardoux. Differential calculus and integration by parts on Poisson space. *Stochastics, Algebra and Analysis in Classical Quantum Dynamics*, 59:63–73, 1990.

[6] M.H.A. Davis and M.P. Johansson. Malliavin Monte Carlo Greeks for jump diffusions. *Stochastic processes and their applications*, 2005.

[7] Y. El-Khatib and N. Privault. Computations of Greeks in a market with jumps via the Malliavin calculus. *Finance and Stochastics*, 8:161–179, 2004.

[8] E. Fourniè, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, and P.-L. Lions. Application of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance II. *Fin. and Stoch*, 5:201–236, 2001.

[9] E. Fourniè, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, and T. Touzi. Application of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. *Finance and Stochastic*, 3:391–412, 1999.

[10] N. Ikeda and S. Watanabe. *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* North-Holland/Kodansya, Tokyo, second edition, 1989.

[11] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit theorems for Stochastic Process*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematic. Springer, second edition, 2003.

[12] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Berlin Heidelberg New York. Springer, 1988.

[13] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au Calcul Stochastique appliqué à la Finance*. Mathématiques & Applications. Ellipses, 1991.

[14] J. A. León, J.L. Solé, F. Utzet, and J. Vives. On Lévy processes, Malliavin calculus and market with jumps. *Finance and Stochastic*, 6:197–225, 2002.

[15] P.A. Meyer. *Un cours sur les intégrales stochastiques*, volume 511 of *Lecture notes in Mathematic*. Springer, 1976.

[16] D. Nualart. *Malliavin Calculus and Related Topics*. Berlin Heidelberg New York. Springer, 1995.

[17] A. Papapantoleon. An introduction to Lévy processes with applications in finance. *Lecture notes, TU Vienna*, 2008.

[18] N. Privault. Chaotic and variational calculus in discrete and continuous time for the Poisson process. *Stochastics and Stochastics Reports*, 51:83–109, 1994.

[19] P. E. Protter. *Stochastic Integration and Differential Equations*. Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer, second edition, 2004.

[20] S. E. Shreve. *Stochastic Calculus for Finance*. Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer-Verlag, New York, second edition, 2004.